Skript zum MSG-Zirkel

Lucas Mann

Vorwort

Dies ist das Skript zum Kurs 7d der mathematischen Schülergesellschaft Leonard-Euler im Schuljahr 2014/2015. Hier füge ich fortlaufend alle im Kurs behandelten Themen und Inhalte ein, wobei ich mich dank nachträglichem Schreiben des Skripts sehr nah dan den tatsächlich im Kurs behandelten Stoff halten kann.

Natürlich richtet sich das Skript zuallererst an die Teilnehmer des Kurses: es zeigt die große Menge an Dingen, die wir bereits im Kurs gelernt haben und es dient jederzeit als Nachschlagewerk, falls irgendetwas im Kurs nicht verstanden wurde oder falls man einmal gefehlt hat. Das Skript hilft aber auch mir, dem Kursleiter, den letzten Kurs zu reflektieren und den nächsten vorzubereiten. Zuallerletzt wird jeder Mathematikinteressierte in diesem Skript manche interessante Dinge lernen können.

Ich wünsche euch nun viel Spaß beim Lesen und weiterhin viel Freude an der Mathematik!

– *Lucas Mann*

Letzte Aktualisierung des Skripts: 25. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Teilbarkeit und Zahlenkongruenzen

In diesem ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem sehr wichtigen und sehr fundamentalen Werkzeug in der Welt der Zahlen: den Zahlenkongruenzen. Wir werden feststellen, dass diese ein mächtiges Mittel bereitstellen, um Aussagen über Teilbarkeit zu machen.

Nach einem kleinen Einblick in die Welt der Zahlen motivieren wir die Definition der Zahlenkongruenzen. Anschließend werden wir ein paar sehr wichtige Eigenschaften herausfinden und zum Teil beweisen. Am Ende wenden wir diese Eigenschaften auf ein paar interessante Beispiele an.

1.1 Die Welt der Zahlen

Zahlen kennt jeder. Das sind zum Beispiel $0,1,2,3$, aber auch $-1,-2$ und $\frac{2}{5},\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{2}$. Die Mathematik begann unter anderem mit dem Studium dieser faszinierenden Objekte und auch heute noch ist die sogenannte Zahlentheorie ein wichtiger Bestandteil der modernen Mathematik. Aber was für Zahlen gibt es eigentlich, und was kann man mit ihnen tun?

Die einfachsten Zahlen sind wohl diejenigen, mit denen wir zählen: $0,1,2,3,4,\ldots$. Wir nennen sie *natürliche Zahlen* und bezeichnen die Menge aller natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$.

Bald jedoch stellte man fest, dass es sehr hilfreich sein kann, auch negative Zahlen zu betrachten, zum Beispiel, um eine Subtraktion von zwei Zahlen immer ausführen zu können. Das führte dazu, die natürlichen Zahlen um die Zahlen $-1,-2,-3,\ldots$ zu erweitern. Die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen zusammen mit den negativen Zahlen bezeichnet man als *ganze Zahlen* und schreibt $\mathbb{Z}$ für die Menge aller ganzen Zahlen.

Auf ähnliche Weise (doch deutlich später) kam man zu der Idee, noch weitere Zahlen zu definieren, nämlich Brüche. Brüche (oder auch Bruchzahlen) sind Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$, wobei a und b beliebige natürliche Zahlen sind, aber b nicht 0 sein darf. Zum Beispiel $\frac{1}{2},\frac{5}{3}$ und $\frac{2}{1}$. Intuitiv bedeutet $\frac{a}{b}$ so viel wie „teile a durch b“. Die Darstellung als Bruch ist nicht eindeutig, da man die gleiche Zahl durch Kürzen und Erweitern auf mehrere Weisen darstellen kann. Zum Beispiel ist $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$. Jede natürliche Zahl kann man als Bruchzahl auffassen, indem man sie in den Zähler schreibt und in den Nenner eine 1 tut, wie in $2=\frac{2}{1}$. Die Gesamtheit aller Bruchzahlen wird mit $\mathbb{Q}_+$ bezeichnet.

Was passiert, wenn wir die Idee der negativen Zahlen auf die Bruchzahlen $\mathbb{Q}_+$ anwenden? Wir erlauben dann auch negative Bruchzahlen, also zum Beispiel $-\frac{3}{4}$ oder $\frac{-2}{3}$ (letzteres ist gleich $-\frac{2}{3}$). Diese neue Menge, die also aus allen Zahlen der Form $\frac{a}{b}$ und $-\frac{a}{b}$ besteht (mit a und b natürliche Zahlen und b ungleich 0), wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Die Zahlen in $\mathbb{Q}$ heißen *rationale Zahlen*.

$\mathbb{Q}$ besteht aus allen Zahlen, die uns fürs Erste interessieren werden. Gibt es noch weitere? Tatsächlich existieren noch weit mehr Zahlen als die rationalen, nämlich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Doch mit diesen werden wir uns wannanders beschäftigen.

Wir sehen, dass wir die folgende Kette haben:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}.$$

Dabei meint „$\subset$“, dass alle Elemente aus der linken Menge auch zur rechten gehören. Die rationalen Zahlen sind also die größte Zahlmenge; allerdings sind es die ganzen Zahlen, die uns am meisten interessieren werden.

1.2 Rechenoperationen

Nun haben wir alle für uns wichtigen Zahlen kennengelernt, bis hin zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Aber was können wir damit machen? Die Antwort ist einfach: Rechnen!

Es gibt vier wichtige Grundoperationen auf den Zahlen: Addition (+), Subtraktion (−), Multiplikation (·) und Division (:). Eine interessante Frage ist, auf welcher der drei oben vorgestellten Zahlenmengen die Operationen *immer* ausgeführt werden können. Damit ist gemeint, dass das Ergebnis der Operation in der Zahlenmenge bleibt. Tabelle 1.1 enthält die Antwort auf die Frage.

Wie man sieht, lassen sich in größeren Zahlenmengen auch mehr Operationen durchführen[1]. Man beachte, dass eine Division $a:b$ nur für $b\neq 0$ durchführbar ist (abgesehen davon kann man in $\mathbb{Q}$ aber immer teilen, denn es ist $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{ps}{qr}$).

[1]Tatsächlich ist die Durchführbarkeit der Operationen die Motivation dahinter, die immer größer werdenden Zahlenmengen zu konstruieren.

	+	−	·	:
$\mathbb{N}$	ja	nein (z. B. $3-4=-1$)	ja	nein (z. B. $2:3=\frac{2}{3}$)
$\mathbb{Z}$	ja	ja	ja	nein (z. B. ($2:3=\frac{2}{3}$)
$\mathbb{Q}$	ja	ja	ja	ja

Tabelle 1.1: Durchführbarkeit der vier Grundrechenoperationen in den drei Zahlenmengen. „ja“ heißt durchführbar und „nein“ heißt nicht durchführbar.

1.3 Das Problem der Teilbarkeit

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Division in $\mathbb{Q}$ immer durchführbar ist, in $\mathbb{Z}$ allerdings nicht. Diese Tatsache macht die ganzen Zahlen in einem gewissen Sinne komplizierter als die rationalen Zahlen – und dadurch auch interessanter. Da man sich auch in $\mathbb{Z}$ dafür interessiert, Zahlen durcheinander zu dividieren, definiert man den Begriff der Teilbarkeit:

Definition 1.1. Seien a und b zwei beliebige ganze Zahlen. Dann sagen wir *a teilt b* (bzw. b ist durch a teilbar), geschrieben $a \mid b$, falls die Division $b : a$ in $\mathbb{Z}$ durchführbar ist, d. h., falls $b : a$ eine ganze Zahl ist.

Alternative Formulierung: Wir sagen $a \mid b$, falls es eine ganze Zahl k mit $b = k \cdot a$ gibt.

Die zweite Formulierung nutzt den Fakt, dass wenn $b : a$ eine ganze Zahl ist und wir diese ganze Zahl k nennen (d. h. $b : a = k$), dann gilt $b = k \cdot a$. Ein paar Beispiele zur Verdeutlichung:

Beispiel 1.2. a) Es gilt $2 \mid 6$, denn $6 : 2 = 3$ ist eine ganze Zahl. Mit der alternativen Formulierung würden wir sagen, dass $2 \mid 6$ gilt, weil $6 = 3 \cdot 2$ (hier ist also $k = 3 = 6 : 2$).

b) Es gilt nicht $3 \mid 5$, denn $5 : 3 = \frac{5}{3}$ ist keine ganze Zahl. Mit der alternativen Formulierung kommen wir zu dem gleichen Ergebnis, denn es gibt keine ganze Zahl k mit $5 = k \cdot 3$.

c) Ist $-5 \mid 10$ richtig? Ja, denn $10 : (-5) = -2$ ist eine ganze Zahl! Mit der alternativen Formulierung sehen wir analog, dass $-10 = -2 \cdot 5$ (hier ist also $k = -2$).

d) Ist $0 \mid 1$ richtig? Nein, denn $1 : 0$ ist nicht durchführbar. Mit der alternativen Formulierung kommen wir zu dem gleichen Ergebnis, denn es gibt keine ganze Zahl k mit $1 = k \cdot 0$.

e) Für jede ganze Zahl a gilt $1 \mid a$, weil $a : 1 = a$ immer eine ganze Zahl ist.

f) Was ist mit $0 \mid 0$? Die Division $0 : 0$ ist nicht durchführbar, was für $0 \nmid 0$ spricht. Andererseits stimmt $0 = k \cdot 0$ für jede ganze Zahl k, d. h. die alternative Formulierung besagt, dass $0 \mid 0$ richtig ist. Tatsächlich sagt man, dass $0 \mid 0$ stimmt.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die alternative Formulierung für die Definition der Teilbarkeit in dem Spezialfall $a = 0$ und $b = 0$ zu einem anderen Ergebnis führt als die Definition mit „$b : a$ ist durchführbar“. Abgesehen von diesem Spezialfall stimmen beide Definitionen aber überein, sodass es genügt, die erste der beiden Definitionen zu kennen.

Betrachten wir mal ein weiteres Beispiel:

Beispiel 1.3. Stimmt $22 \mid 264$? Ja, denn $264 : 22 = 12$ ist eine ganze Zahl. Stimmt auch $11 \mid 264$? Es gibt zwei Wege das herauszufinden:

1. Offensichtlich ist $264 : 11 = 24$ eine ganze Zahl und folglich gilt $11 \mid 264$.
2. Wir wissen bereits, dass $22 \mid 264$ richtig ist, d. h. 264 ist ein Vielfaches von 22. Wegen $11 \mid 22$ folgt bereits, dass 264 auch ein Vielfaches von 11 ist, also stimmt $11 \mid 264$.

Die zweite Methode in dem vorigen Beispiel führt zu folgendem allgemeinen Satz, unserer ersten Regel über Teilbarkeit:

Satz 1.4. *Seien a, b, c ganze Zahlen. Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, so stimmt auch $a \mid c$.*

Wir werden uns später mit derartigen Regeln beschäftigen und auch beweisen. Fürs erste genügt es, diese Regel zu verstehen. In obigem Beispiel ist $a = 11$, $b = 22$ und $c = 264$. Der Satz sagt dann: Weil $11 \mid 22$ und $22 \mid 264$ gilt, stimmt auch $11 \mid 264$.

1.4 Definition der Zahlenkongruenzen

Schauen wir uns ein weiteres Beispiel an:

Beispiel 1.5. Stimmt $17|1872$? Um das herauszufinden, dividieren wir (schriftlich) 1872 durch 17. Wir sehen, dass dabei der *Rest* 2 auftritt, das heißt $1872 : 17$ ist keine ganze Zahl.

Das Beispiel zeigt, dass die Teilbarkeit von ganzen Zahlen sehr eng mit dem Rest bei der Division verbunden ist. Wenn wir also einen Weg finden, mit dem wir auf einfache Weise den Rest einer (großen) Zahl bei Division durch eine andere Zahl berechnen können, dann wissen wir insbesondere, ob die große Zahl durch die andere Zahl teilbar ist. Diese Idee motiviert die Definition von sogenannten Zahlenkongruenzen[2]. Da wir uns ab jetzt nur noch für den Rest einer Zahl bei Division durch eine bestimmte andere Zahl ineressieren, lohnt es sich, zwei Zahlen als „ähnlich“ anzusehen, wenn sie den gleichen Rest haben:

Definition 1.6. Seien a, b und m nichtnegative ganze Zahlen und m ungleich 0. Wir sagen

$$a \equiv b \pmod{m} \qquad (\text{„}a \text{ ist kongruent zu } b \text{ modulo } m\text{“}),$$

wenn a und b den gleichen Rest bei Division durch m haben.

Ein paar Beispiele:

Beispiel 1.7. a) Es gilt $5 \equiv 8 \pmod 3$, denn 5 und 8 haben den gleichen Rest bei Division durch 3.

b) Es gilt nicht $625 \equiv 4 \pmod 2$, denn 625 und 4 haben verschiedene Reste bei Division durch 2.

c) Es gilt $81 \equiv 31 \pmod{10}$, denn 81 und 31 haben beide den Rest 1 bei Division durch 10.

Man sieht sofort, dass für nichtnegative ganze Zahlen a und m mit m ungleich 0 gilt: a ist genau dann durch m teilbar, wenn $a \equiv 0 \pmod m$, denn letzteres ist gleichbedeutend damit, dass a den gleichen Rest wie 0 bei Division durch m hat und 0 hat den Rest 0. Kongruente Zahlen zu finden hilft also (wie eingangs bereits angedeutet) dabei, Teilbarkeitseigenschaften zu beweisen.

Unser Ziel in den kommenden Abschnitten wird sein, hilfreiche Eigenschaften für Zahlenkongruenzen zu finden, die es uns erlauben, auf einfache Weise festzustellen, ob zwei Zahlen kongruent modulo einer dritten sind.

1.5 Das Verhalten der Einerziffer bei Addition und Multiplikation

Wir beschränken uns zunächst auf die Frage, wie wir die Einerziffer von Summen und Produkten großer Zahlen berechnen können. Später werden wir sehen, dass sich die dabei entwickelten Methoden leicht auf Zahlenkongruenzen anwenden lassen.

Es ist immer hilfreich, sich interessante Fragen zu stellen. Hier ein paar Beispiele:

Frage 1.8. Was ist die Einerziffer von[3] 31^{1000}?

Es ist unmöglich, diese Zahl mit einem Taschenrechner auszurechnen. Um eine Idee zu bekommen, was die Einerziffer sein könnte, rechnen wir die Einerziffern von kleineren Potenzen von 31 aus:

- Die Einerziffer von 31^1 ist 1, da $31^1 = 31$.
- Die Einerziffer von 31^2 ist 1, da $31^2 = 31 \cdot 31 = 961$.
- Die Einerziffer von 31^3 ist 1, da $31^3 = 31 \cdot 31^2 = 29791$.

Die drei Beispiele legen die Vermutung nahe, dass die Einerziffer von 31^{1000} auch 1 ist und dass sogar jede Potenz von 31 die Einerziffer 1 hat.

Frage 1.9. Was ist die Einerziffer von 14^{1000}?

Wiederum rechnen wir ein paar kleinere Potenzen aus:

- Die Einerziffer von 14^1 ist 4.

[2] Obwohl in dem Wort „Zahlenkongruenz“ der Begriff „Kongruenz“ steckt, haben Zahlenkongruenzen nichts mit geometrischer Kongruenz (wie zum Beispiel von Dreiecken) zu tun!

[3] Mit 31^{1000} meinen wir die Zahl $\underbrace{31 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 31}_{1000 \text{ mal}}$. Eine solche Zahl wird *Potenz* genannt.

- Die Einerziffer von 14^2 ist 6, da $14^2 = 14 \cdot 14 = 196$.
- Die Einerziffer von 14^3 ist 4, da $14^3 = 14 \cdot 14^2 = 2744$.
- Die Einerziffer von 14^4 ist 6, da $14^4 = 14 \cdot 14^3 = 38416$.

Die Beispiele lassen vermuten, dass jede zweite Potenz von 14 die Einerziffer 4 hat und alle anderen Potenzen die Einerziffer 6 haben. Dann hat 14^{1000} die Einerziffer 6.

Wenn man sich die Untersuchungen zu den beiden obigen Fragen anschaut, dann stellt man fest, dass die Einerziffer einer Potenz von 31 gleich der Einerziffer von 1 hoch die gleiche Zahl ist (nämlich immer 1). Analog scheint die Einerziffer einer Potenz von 14 sich genauso zu verhalten wie die Einerziffer von 4 hoch die gleiche Zahl. Dies legt die folgende Vermutung nahe:

Vermutung 1.10. *Die Einerziffer einer Potenz erhält man, indem man nur die Einerziffer der Basis potenziert. Genauer: Ist e die Einerziffer der natürlichen Zahl a, dann haben a^k und e^k die gleiche Einerziffer (für jeden positiven Exponenten k).*

Potenzieren ist nichts anderes als sehr häufiges Multiplizieren. Steckt hinter Vermutung 1.10 vielleicht sogar eine allgemeinere Aussage, nämlich über Produkte? Schauen wir uns zwei Beispiele an:

Beispiel 1.11. a) Was ist die Einerziffer von $13 \cdot 22$? Wir rechnen das Produkt aus und erhalten 286, die gesuchte Einerziffer ist also 6. Wir stellen fest, dass $6 = 3 \cdot 2$, das heißt die Einerziffer von $13 \cdot 22$ ist gleich dem Produkt der Einerziffern von 13 und 22.

b) Was ist die Einerziffer von $16 \cdot 33$? Das Produkt ist gleich 528, die Einerziffer somit 8. Wir sehen, dass 8 auch die Einerziffer von $18 = 6 \cdot 3$ ist, das heißt die Einerziffer des Produktes $16 \cdot 33$ ist gleich der Einerziffer des Produktes der Einerziffern von 16 und 33.

Die Beispiele führen zu folgender Vermutung:

Vermutung 1.12. *Die Einerziffer eines Produktes verhält sich so wie die Einerziffern der Faktoren. Genauer: Ist e die Einerziffer der natürlichen Zahl a und f die Einerziffer der natürlichen Zahl b, so ist die Einerziffer von $a \cdot b$ gleich der Einerziffer von $e \cdot f$.*

Diese Vermutung ist tatsächlich richtig und wir werden sie beweisen:

Satz 1.13. *Vermutung 1.12 ist richtig. Daraus folgt, dass auch Vermutung 1.10 richtig ist.*

Beweis. Wir überlegen uns den Beweis zunächst für den Spezialfall, dass beide Faktoren zweistellige Zahlen sind. Wir schreiben $\overline{xe}$ und $\overline{yf}$ für diese beiden zweistelligen Zahlen; dabei meint $\overline{xe}$ die zweistellige Zahl mit den Ziffern x und e (wobei e die Einerstelle ist). Für die Faktoren 16 und 33 aus Beispiel 1.11.b wäre $x = 1$, $e = 6$, $y = 3$ und $f = 3$. In unserer Notation sieht man sofort, dass e die Einerstelle von $\overline{xe}$ und f die Einerstelle von $\overline{yf}$ ist. Wir müssen also beweisen:

Die Einerstelle von $\overline{xe} \cdot \overline{yf}$ ist gleich der Einerstelle von $e \cdot f$.

Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} \overline{xe} &= 10 \cdot x + e \qquad \text{(z. B. } 16 = 10 \cdot 1 + 6\text{)},\\ \overline{yf} &= 10 \cdot y + f \qquad \text{(z. B. } 33 = 10 \cdot 3 + 3\text{)}. \end{aligned}$$

Setzen wir das in das Produkt $\overline{xe} \cdot \overline{yf}$ ein, so erhalten wir nach Ausmultiplizieren[4]:

$$\begin{aligned} \overline{xe} \cdot \overline{yf} &= (10x + e)(10y + f)\\ &= (10x)(10y) + (10x)f + e(10y) + ef\\ &= \underbrace{100xy + 10xf + 10ey}_{\text{durch 10 teilbar}} + ef. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Summe in der letzten der drei Zeilen: Die ersten drei Summanden sind durch 10 teilbar, d. h. die Einerziffer von ihnen ist 0. Damit folgt, dass die Einerziffer von der gesamten Summe gleich der

[4] Um ein Produkt der Form $(a + b) \cdot (c + d)$ auszumultiplizieren, wenden wir das Distributivgesetz an: Man multipliziert jeden Summanden des ersten Faktors nacheinander mit jedem Summanden im zweiten Faktor und addiert alle diese Produkte zusammen. Daher gilt $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Einerziffer von dem Produkt ef ist. Da diese Summe aber gleich dem Produkt $\overline{xe} \cdot \overline{yf}$ ist, haben wir genau das gezeigt, was wir beweisen wollten.

Wie können wir diesen Beweis auf beliebige (also nicht unbedingt zweistellige) Zahlen verallgemeinern? Wir machen zunächst die folgende Feststellung: Wenn a eine Zahl mit Einerziffer e ist, dann können wir $a = 10x + e$ schreiben, wobei x eine natürliche Zahl (nicht unbedingt eine Ziffer) ist. Zum Beispiel ist $1234 = 10 \cdot 123 + 4$ oder $5 = 10 \cdot 0 + 5$.

Nehmen wir uns also zwei beliebige Zahlen a und b mit Einerziffern e und f, dann können wir a und b als $a = 10x + e$ und $b = 10y + f$ mit natürlichen Zahlen x, y darstellen. Wir wollen nun beweisen, dass die Einerziffer von dem Produkt $a \cdot b = (10x + e) \cdot (10y + f)$ gleich der Einerziffer von $e \cdot f$ ist. Dafür funktioniert aber genau die gleiche Argumentation wie oben, denn wir haben in dem Spezialfall mit zweistelligen Zahlen nirgendwo irgendeine spezielle Eigenschaft von x und y benutzt!

Damit ist Vermutung 1.12 bewiesen. Die Vermutung 1.10 folgt daraus sofort, indem man Vermutung 1.12 ganz oft hintereinander anwendet (eine Potenz ist nichts anderes als ein langes Produkt). □

Die Frage nach der Einerziffer hat einiges mit den im letzten Abschnitt eingeführten Zahlenkongruenzen zu tun. Denn der Rest einer Zahl bei Division durch 10 ist gleich der Einerziffer, d. h. zwei Zahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie die gleichen Einerziffern haben. Der obige Satz sagt also, dass das Produkt von zwei Zahlen kongruent zu dem Produkt ihrer Einerziffern modulo 10 ist. Das führt zu dem folgenden wichtigen Satz:

Satz 1.14. *Ersetzt man in einem Produkt die Faktoren durch Zahlen, die zu ihnen kongruent modulo* 10 *sind, dann ist das neue Produkt kongruent zu dem alten modulo* 10*. Genauer: Sind a, a', b, b' natürliche Zahlen mit $a \equiv a' \pmod{10}$ und $b \equiv b' \pmod{10}$ (das heißt a und a' bzw. b und b' haben die gleiche Einerziffer), dann ist $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{10}$.*

Beweis. Die Produkte sind jeweils kongruent zu dem Produkt ihrer Einerziffern, was aber in beiden Fällen das gleiche ist. Somit haben beide Produkte den gleichen Rest bei Division durch 10 und sind per Definition kongruent modulo 10. □

Wir betrachten nochmal all unsere Beispiele von oben:

Beispiel 1.15. a) Was ist der Rest von $13 \cdot 22$ bei Division durch 10? Der Satz sagt, dass $13 \cdot 22 \equiv 3 \cdot 2 = 6 \pmod{10}$ (im ersten Schritt wurde 13 durch 3 und im zweiten 22 durch 2 ersetzt). Der gesuchte Rest ist also 6, d. h. $13 \cdot 22$ hat die Einerziffer 6.

b) Ähnlich wie im vorigen Beispiel bestimmen wir den Rest von $16 \cdot 33$ bei Division durch 10: Es gilt $16 \cdot 33 \equiv 6 \cdot 3 = 18 \equiv 8 \pmod{10}$. Die Einerziffer von $16 \cdot 33$ ist somit 8.

c) Wir wenden die Regel sehr oft auf die Potenz 31^{1000} an und sehen somit, dass wir jeden Faktor 31 durch die zu 31 kongruente Zahl 1 ersetzen können. Also gilt $31^{1000} \equiv 1^{1000} = 1 \pmod{10}$, die Einerziffer von 31^{1000} ist folglich 1.

d) Wie im vorigen Beispiel sehen wir $14^{1000} \equiv 4^{1000} \pmod{10}$. Nun wenden wir einen kleinen Trick an: Es gilt nämlich $4^{1000} = (4^2)^{500}$, denn 1000 mal Vieren zu multiplizieren ist das gleiche wie 500 mal 4^2 zu multiplizieren. Also folgt $4^{1000} = (4^2)^{500} = 16^{500} \equiv 6^{500} \pmod{10}$. Wir wenden den gleichen Trick mehrmals an:

$$6^{500} = (6^2)^{250} = 36^{250} \equiv 6^{250} = 36^{125} \equiv 6^{125} \pmod{10}.$$

Nun ist $6^{125} = (6^5)^5$, es lohnt sich also, den Rest von 6^5 bei Division durch 10 zu bestimmen: Wir sehen

$$6^5 = 36 \cdot 36 \cdot 6 \equiv 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 \equiv 6 \cdot 6 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$$

und somit $6^{125} = (6^5)^5 \equiv 6^5 \equiv 6 \pmod{10}$. Insgesamt erhalten wir also $14^{1000} \equiv 6 \pmod{10}$, wie wir weiter oben bereits vermuteten.

1.6 Eigenschaften von Zahlenkongruenzen

Wir hatten im letzten Abschnitt eine sehr wirkungsvolle Methode gefunden, um Zahlenkongruenzen modulo 10 zu berechnen: In einem Produkt darf man die Faktoren durch kongruente Zahlen ersetzen, ohne den Rest bei Division durch 10 zu verändern. Funktioniert diese Regel nur für 10 oder gilt etwas ähnliches auch für andere Moduli m?

Wir probieren ein Beispiel:

Beispiel 1.16. Was ist der Rest von $26 \cdot 52$ bei Division durch 6? Wenden wir eine ähnliche Regel wie im letzten Abschnitt an und ersetzen 26 durch 2 (denn $26 \equiv 2 \pmod 6$) und 52 durch 4 (denn $52 \equiv 4 \pmod 6$), so gelangen wir zu der Vermutung $26 \cdot 52 \equiv 2 \cdot 4 = 8 \equiv 2 \pmod 6$.

Explizites Nachrechnen ergibt $26 \cdot 52 = 1352$ und das hat tatsächlich den Rest 2 bei Division durch 6.

Das vorige Beispiel führt zu folgender Vermutung:

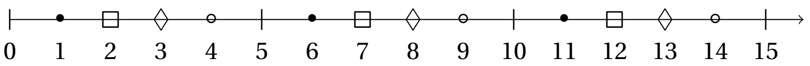
Vermutung 1.17. *Sei m eine beliebige positive ganze Zahl. Dann gilt: Ersetzt man in einem Produkt die Faktoren durch zu ihnen kongruente Zahlen modulo m, dann ist das neue Produkt kongruent zum alten modulo m.*

Insbesondere kann man bei einer Potenz a^e die Basis a durch eine zu a kongruente Zahl b ersetzen und erhält die zu a^e kongruente Zahl b^e (alles modulo m).

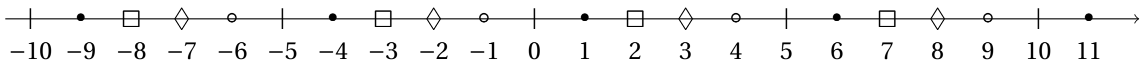
Bevor wir versuchen werden, diese Vermutung zu beweisen, schauen wir uns die Definition von Zahlenkongruenzen einmal genauer an. Wir haben für *nichtnegative* ganze Zahlen a und b und für positive ganze Zahlen m definiert, dass $a \equiv b \pmod m$, wenn a und b den gleichen Rest bei Division durch m haben. Im Folgenden werden wir diese Definition auf negative Zahlen a und b erweitern. Das geht nicht ohne Weiteres, da wir für negative a und b nicht wissen, was mit „Rest" bei Division durch m gemeint sein soll.

Wir betrachten die Verteilung der kongruenten Zahlen auf dem Zahlenstrahl. In Abbildung 1.1a sind die Zahlenkongruenzen modulo 5 abgebildet. Jede Zahl auf dem Zahlenstrahl wurde mit einem Symbol versehen, wobei zwei Zahlen genau dann das gleiche Symbol haben, wenn sie kongruent modulo 5 sind (das heißt, wenn sie den gleichen Rest bei Division durch 5 haben). Es gibt ein sehr auffälliges Muster: kongruente Zahlen haben immer einen durch 5 teilbaren Abstand[5] (z. B. haben 1 und 6 den Abstand 5 und 1 und 11 den Abstand 10) und die fünf Mengen der kongruenten Zahlen sind genau gleich aufgebaut, sie unterscheiden sich lediglich um eine Verschiebung.

Wenn wir dieses Muster auf die negativen Zahlen fortsetzen, dann erhalten wir den in Abbildung 1.1b dargestellten Zahlenstrahl. Nutzen wir diese sinnvolle Verallgemeinerung der Zahlenkongruenzen, so ist zum Beispiel $3 \equiv -2 \equiv -7 \pmod 5$ und $4 \equiv -1 \equiv -6 \pmod 5$.



(a) Verteilung der kongruenten Zahlen modulo 5 (gleiches Symbol bedeutet kongruent).



(b) Fortsetzung des Musters auf negative Zahlen.

Abbildung 1.1: Anschauliche Motivation für die erweiterte Definition der Zahlenkongruenzen.

Wir formulieren diese neue Definition:

Definition 1.18. Sei m eine positive ganze Zahl und seien a und b beliebige ganze Zahlen. Wir sagen $a \equiv b \pmod m$, falls $a - b$ durch m teilbar ist[6].

Für nichtnegative Zahlen a und b haben wir plötzlich zwei verschiedene Definition für Zahlenkongruenzen, nämlich einmal Definition 1.6 und dann die neue Definition 1.18! Das ist aber kein Problem, da beide Definition übereinstimmen. Für nichtnegative Zahlen a und b haben wir somit zwei verschiedene Möglichkeiten, sie auf Kongruenz modulo m zu überprüfen: Entweder wir vergleichen ihre Reste bei Division durch m oder wir überprüfen, ob $a - b$ durch m teilbar ist – das Ergebnis ist das gleiche.

Für negative a und b ist die obige Definition aber tatsächlich etwas Neues. Hier ein paar Beispiele:

Beispiel 1.19. a) Es gilt $9 \equiv -1 \equiv -11 \pmod{10}$, denn $9 - (-1) = 10$ ist durch 10 teilbar und $-1 - (-11) = 10$ ist durch 10 teilbar.

b) Es gilt $-2 \equiv 4 \pmod 6$, denn $-2 - 4 = -6$ ist durch 6 teilbar.

c) Es ist $-1 \not\equiv 1 \pmod 5$, denn $-1 - 1 = -2$ ist nicht durch 5 teilbar.

[5] Anders gesagt: Um von einer Zahl a zu der nächstgrößeren Zahl mit dem gleichen Rest bei Division durch 5 zu kommen, muss man 5 addieren.

[6] Die Differenz $a - b$ ist bis auf das Vorzeichen gleich dem Abstand von a und b auf dem Zahlenstrahl. Zum Beispiel haben die Zahlen 4 und -1 den Abstand 5 und das ist gleich $4 - (-1)$.

Mit dem neuen Wissen über Zahlenkongruenzen können wir die Vermutung 1.17 beweisen. Wir beweisen gleich noch eine analoge Aussage über Summen.

Satz 1.20. *Sei m eine beliebige positive ganze Zahl. Dann gilt: Ersetzt man in einem Produkt die Faktoren durch zu ihnen kongruente Zahlen modulo m, dann ist das neue Produkt kongruent zum alten modulo m. Das gleiche gilt für Summanden in einer Summe und für Differenzen.*

Genauer: Gilt $a \equiv a' \pmod{m}$ und $b \equiv b' \pmod{m}$ für ganze Zahlen a, a', b und b', dann folgt $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{m}$, $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$ und $a - b \equiv a' - b' \pmod{m}$.

Beweis. Die Aussage über Summen werden wir hier nicht beweisen; es ist aber nicht so schwer sich zu überlegen, warum sie gilt.

Wir deuten einen Beweis für das Produkt an: Da a und a' kongruent modulo m sind, ist (nach Definition) $a - a'$ durch m teilbar, das heißt $a - a' = km$ für eine ganze Zahl k. Das ist gleichbedeutend mit $a = km + a'$. Analog zeigt man, dass es eine ganze Zahl ℓ mit $b = \ell m + b'$ gibt. Wir wollen zeigen, dass $ab - a'b'$ durch m teilbar ist. Setzt man $a = km + a'$ und $b = \ell m + b'$ ein, so erhält man durch sehr ähnliches Umformen wie im Beweis von Satz 1.13[7]:

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= (km + a')(\ell m + b') - a'b' \\ &= (m^2 k\ell + mkb' + m\ell a' + a'b') - a'b' \\ &= m^2 k\ell + mkb' + m\ell a'. \end{aligned}$$

Diese Summe ist durch m teilbar. Das vollendet den Beweis. □

Dieser Satz hat durch mehrmalige Anwendung die folgende sehr wichtige und überaus mächtige Regel als Konsequenz:

Satz 1.21. *Sei m eine positive ganze Zahl. Ersetzt man in irgendeinem Term bestehend aus Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Potenzen irgendwelche in ihm vorkommenden Zahlen (außer Exponenten!) durch zu ihnen kongruente Zahlen modulo m, dann ist der neue Term kongruent zum alten Term modulo m.*

Zur Demonstration zwei Beispiele:

Beispiel 1.22. a) Was ist der Rest von $(52 - 104^2)^{100}$ bei Division durch 5? Wegen $52 \equiv 2 \pmod{5}$ und $104 \equiv 4 \pmod{5}$ erhalten wir

$$(52 - 104^2)^{100} \equiv (2 - 4^2)^{100} = (2 - 16)^{100} = (-14)^{100} \pmod{5}.$$

Aus $-14 \equiv 1 \pmod{5}$ (denn $-14 - 1 = -15$ ist durch 5 teilbar) folgt also

$$(-14)^{100} \equiv 1^{100} = 1 \pmod{5}.$$

Der gesuchte Rest ist folglich 1.

Wir wären ein bisschen schneller zum Ziel gelangt, wenn wir die Tatsache $104 \equiv -1 \pmod{5}$ verwendet hätten. Man sollte die negativen Zahlen also immer im Blick behalten!

b) Was ist der Rest von $(4231^{10} - 32)^2 \cdot 1234$ bei Division durch 9? Wir verwenden $4231 \equiv 1 \pmod{9}$, $32 \equiv 5 \pmod{9}$ und $1234 \equiv 1 \pmod{9}$ und formen um:

$$(4231^{10} - 32)^2 \cdot 1234 \equiv (1^{10} - 5)^2 \cdot 1 = (-4)^2 \cdot 1 = 16 \equiv 7 \pmod{9}.$$

Der gesuchte Rest ist also 7.

1.7 Teilbarkeitsregeln

Als erste Anwendung der in Satz 1.21 beschriebenen Rechenregeln für Zahlenkongruenzen leiten wir alle einfachen Teilbarkeitsregeln her. Wir werden sehen, dass alle diese Regeln auf dem gleichen Prinzip beruhen, obwohl sie auf den ersten Blick verschieden wirken.

Wir beginnen mit der Teilbarkeit durch 9:

[7] Tatsächlich sind die im Folgenden gezeigten Umformen genau die gleichen wie in Satz 1.13, wobei wir in Satz 1.13 den speziellen Fall $m = 10$ hatten.

Frage 1.23. Was ist der Rest von 529381 bei Division duch 9? Wir können Satz 1.21 nicht direkt anwenden, weil wir keine Summen und Produkte haben. Daher benutzen wir einen Trick. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}529381 &= 1 + 10\cdot 8 + 100\cdot 3 + 1000\cdot 9 + 10000\cdot 2 + 100000\cdot 5\\ &= 1 + 10\cdot 8 + 10^2\cdot 3 + 10^3\cdot 9 + 10^4\cdot 2 + 10^5\cdot 5.\end{aligned}$$

Nun lässt sich der Satz anwenden. Wegen $10 \equiv 1 \pmod 9$ können wir jede 10 durch 1 ersetzen und erhalten eine zur Ausgangszahl kongruente Zahl modulo 9:

$$\begin{aligned}529381 &\equiv 1 + 1\cdot 8 + 1^2\cdot 3 + 1^3\cdot 9 + 1^4\cdot 2 + 1^4\cdot 5 \pmod 9\\ &= 1+8+3+9+2+5.\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile steht die Quersumme von 529381. Diese Methode lässt sich leicht für jede natürliche Zahl anwenden und führt zu folgender Regel: Jede Zahl ist kongruent zu ihrer Quersumme modulo 9.

Genau der gleiche Beweis funktioniert auch für 3 statt 9, das heißt jede Zahl ist auch kongruent zu ihrer Quersumme modulo 3.

Zur Teilbarkeitsregel für die 4:

Frage 1.24. Was ist der Rest von 529381 bei Division durch 4? Wir wenden den gleichen Trick wie eben an und benutzen dabei, dass $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod 4$, das heißt insbesondere $10^3 \equiv 0, 10^4 \equiv 0, \ldots \pmod 4$:

$$\begin{aligned}529381 &= 1 + 10\cdot 8 + 10^2\cdot 3 + 10^3\cdot 9 + 10^4\cdot 2 + 10^5\cdot 5\\ &\equiv 1 + 10\cdot 8 + 0\cdot 3 + 0\cdot 9 + 0\cdot 2 + 0\cdot 5 \pmod 4\\ &= 1 + 10\cdot 8\\ &= 81.\end{aligned}$$

Ein ähnlicher Beweis funktioniert für alle anderen natürlichen Zahlen und führt zu folgender Regel: Jede natürliche Zahl ist kongruent zu der aus den letzten beiden Ziffern gebildeten Zahl modulo 4.

Ein ähnlicher Beweis führt zu: Jede Zahl ist kongruent zu ihrer letzten Ziffer modulo 2 und kongruent zu der aus den letzten drei Ziffern gebildeten Zahl modulo 8. Und: Jede Zahl ist kongruent zu ihrer letzten Ziffer modulo 5 und modulo 10.

Damit haben wir die Teilbarkeitsregeln für $2, 3, 4, 5, 8, 9$ und 10 bewiesen. Die Teilbarkeitsregel für 6 setzt sich aus der Regel für 2 und der Regel für 3 zusammen. Warum gibt es keine ähnlich einfache Regel für die 7? Schauen wir uns ein Beispiel an:

Frage 1.25. Was ist der Rest von 529381 bei Division durch 7? Es gilt $10 \equiv 3 \pmod 7$, also:

$$529381 \equiv 1 + 3\cdot 8 + 3^2\cdot 3 + 3^3\cdot 9 + 3^4\cdot 2 + 3^5\cdot 5 \pmod 7.$$

Leider hilft diese „Vereinfachung“ nicht sehr viel, da man immer noch hoche Potenzen von 3 ausrechnen muss. Klar, man kann diese Potenzen modulo 7 relativ leicht bestimmen, z. B. ist $3^2 = 9 \equiv 2 \pmod 7$, $3^3 = 3^2\cdot 3 \equiv 2\cdot 3 = 6 \pmod 7$ und so weiter, aber das führt zu keiner einfachen Regel[8].

Eine weitere einfache Teilbarkeitsregel gibt es aber noch, nämlich die von der 11:

Frage 1.26. Was ist der Rest von 529381 bei Division durch 11? Es gilt $10 \equiv -1 \pmod{11}$ und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}529381 &\equiv 1 + (-1)\cdot 8 + (-1)^2\cdot 3 + (-1)^3\cdot 9 + (-1)^4\cdot 2 + (-1)^5\cdot 5 \pmod{11}\\ &= 1 + (-1)\cdot 8 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot 9 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 5\\ &= 1 - 8 + 3 - 9 + 2 - 5.\end{aligned}$$

Diese Summe ist die Summe aller Ziffern mit abwechselnd plus und minus. Sie wird *alternierende Quersumme* genannt. Wir erhalten somit die Regel: Jede Zahl ist kongruent zu ihrer alternierenden Quersumme modulo 11. Insbesondere ist eine Zahl genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

[8] Tatsächlich gibt es Teilbarkeitsregeln für die 7, die aber auf einem anderen Prinzip beruhen wie die restlichen Teilbarkeitsregeln und leider komplizierter sind.

1.8 Weitere Anwendungen

Wir befassen uns nun noch mit zwei olympiadeartigen Aufgaben, die sehr elegant mit der Hilfe von Zahlenkongruenzen gelöst werden können.

Aufgabe 1.27. Ist die Zahl $a = 222^{555} + 555^{222}$ durch 7 teilbar?

Lösung. Wir müssen den Rest von a bei Division durch 7 bestimmen, dann können wir die Frage beantworten. Es gilt $222 \equiv -2 \pmod 7$ und $555 \equiv 2 \pmod 7$, also:

$$222^{555} + 555^{222} \equiv (-2)^{555} + 2^{222} = ((-2)^5)^{111} + (2^2)^{111} = (-32)^{111} + 4^{111} \pmod 7.$$

Wegen $-32 \equiv 3 \pmod 7$ (denn $-32 - 3 = -35$ ist durch 7 teilbar) erhalten wir

$$(-32)^{111} + 4^{111} \equiv 3^{111} + 4^{111} \pmod 7.$$

Ferner ist $111 = 3 \cdot 37$, also

$$3^{111} + 4^{111} = (3^3)^{37} + (4^3)^{37} = 27^{37} + 64^{37} \equiv (-1)^{37} + 1^{37} \pmod 7.$$

Da 37 ungerade ist, ist $(-1)^{37} = -1$. Insgesamt folgt:

$$(-1)^{37} + 1^{37} = -1 + 1 = 0.$$

Der Rest von a bei Division durch 7 ist also 0, das heißt, a ist durch 7 teilbar.

Eine andere Aufgabe, diesmal direkt aus der Olympiade:

Aufgabe 1.28. Zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Zahl $a = 7^{2n} + 7^n + 7^{n+1} + 3$ durch 12 teilbar ist.

Lösung. Es gibt zwei mögliche Beweise, von denen der zweite der vielleicht naheliegendere und der erste der einfachere ist:

1. Es genügt zu zeigen, dass a durch 3 und durch 4 teilbar ist.

   Teilbarkeit durch 3. Wegen $7 \equiv 1 \pmod 3$ gilt:

   $$a = 7^{2n} + 7^n + 7^{n+1} + 3 \equiv 1^{2n} + 1^n + 1^{n+1} + 0 = 1 + 1 + 1 = 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

   Das zeigt bereits $3 \mid a$.

   Teilbarkeit durch 4. Wegen $7 \equiv -1 \pmod 4$ gilt:

   $$\begin{aligned} a &= 7^{2n} + 7^n + 7^{n+1} + 3 \\ &\equiv (-1)^{2n} + (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1) \pmod 4 \\ &= 1 + (-1)^n + (-1)^{n+1} - 1 \\ &= (-1)^n + (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

   Es ist entweder n gerade und $n+1$ ungerade oder n ungerade und $n+1$ gerade. In beiden Fällen ist genau einer der Summanden gleich 1 und der andere gleich -1. Folglich ist die Summe immer gleich 0, das heißt der Rest von a bei Division durch 4 ist 0, das heißt $4 \mid a$.

2. Wir berechnen den Rest von a bei Division durch 12. Zunächst stellen wir fest, dass $7^{2n} = (7^2)^n = 49^n$. Wegen $49 \equiv 1 \pmod{12}$ ist $49^n \equiv 1^n = 1 \pmod{12}$, also:

   $$a = 7^{2n} + 7^n + 7^{n+1} + 3 \equiv 1 + 7^n + 7^{n+1} + 3 = 4 + 7^n + 7^{n+1} \pmod{12}.$$

   Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor, ob n gerade oder ungerade ist:

   1. Fall: n gerade. In diesem Fall ist $7^n \equiv 1 \pmod{12}$ nach dem gleichen Argument wie soeben. Folglich gilt $7^{n+1} = 7 \cdot 7^n \equiv 7 \cdot 1 = 7 \pmod{12}$, also

   $$a \equiv 4 + 7^n + 7^{n+1} \equiv 4 + 1 + 7 = 12 \equiv 0 \pmod{12}.$$

2. Fall n ungerade. In diesem Fall sind $n-1$ und $n+1$ gerade, das heißt $7^{n-1} \equiv 7^{n+1} \equiv 1 \pmod{12}$. Es folgt $7^n = 7^{n-1} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod{12}$ und somit

$$a \equiv 4 + 7^n + 7^{n+1} \equiv 4 + 7 + 1 = 12 \equiv 0 \pmod{12}.$$

In beiden Fällen ist also $a \equiv 0 \pmod{12}$, das heißt a ist durch 12 teilbar.

Diese letzte Aufgabe stammt aus der dritten Stufe der Mathematikolympiade und richtete sich an Teilnehmer in der neunten Klasse! Das Thema Zahlenkongruenzen ist hiermit vorerst beendet. Die in diesem Kapitel erlernte Methodik wird uns aber in allen anderen Bereichen der Zahlentheorie erneut begegnen!

2 Primzahlen, ggT und kgV

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer sehr wichtigen Teilmenge der ganzen Zahlen: die Primzahlen. Primzahlen und die Primfaktorzerlegung bilden den Grundstein für unsere Intuition im Umgang mit den ganzen Zahlen. Eng mit den Primzahlen verknüpft sind der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache, die wir ebenfalls in diesem Kapitel betrachten werden.

2.1 Primzahlen und Primfaktorzerlegung

Primzahlen sind jedem bekannt. Das sind die Zahlen $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. Doch was ist eigentlich eine Primzahl? Versuchen wir es mit folgender Definition:

Definition 2.1 (vorläufig!)**.** Eine *Primzahl* ist eine ganze Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Diese Definition wirft einige Probleme auf:

- Ist nach Definition 2.1 die Zahl 2 eine Primzahl? 2 ist durch 1 und durch 2 teilbar, aber auch durch -1 und -2 (denn es gilt z. B. $2 : (-1) = -2$ und das ist eine ganze Zahl). Tatsächlich ist *jede* ganze Zahl durch -1 teilbar, unsere Definition schließt also alle Zahlen (bis auf -1) aus, was garantiert nicht beabsichtigt war.

  Um diesen Mangel zu beheben, sagen wir, dass 1 und die Zahl selbst die einzigen *positiven* Teiler sind.

- Ist -2 eine Primzahl? Nun, die einzigen positiven Teiler von -2 sind 1 und 2, also ja. Andererseits versteht man unter „Primzahl" normalerweise nur positive Zahlen[9] und das sollten wir daher in die Definition aufnehmen.

- Ist 1 eine Primzahl? Nach der Definition schon, denn 1 ist positiv und die einzigen positiven Teiler von 1 sind 1 und 1. Wir wollen 1 aber nicht als Primzahl ansehen (das würde zum Beispiel die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung verletzen, siehe unten), daher müssen wir diesen Spezialfall aus der Definition ausschließen.

Die obigen Betrachtungen führen zu folgender richtigen Definition für Primzahlen:

Definition 2.2. Eine *Primzahl* ist eine positive ganze Zahl, die genau zwei positive Teiler hat (nämlich 1 und sich selbst).

Die wichtigste Eigenschaft von Primzahlen ist, dass man mit ihnen alle anderen Zahlen darstellen kann, wie der folgende Satz zusammenfasst:

Satz 2.3. *Jede natürliche Zahl lässt sich auf eindeutge Weise als Produkt von Primzahlen schreiben. Mit „eindeutig" ist gemeint, dass die Häufigkeit jedes Primfaktors eindeutig durch die Zahl gegeben ist.*

Ein Beispiel zur Veranschaulichung:

Beispiel 2.4. Was ist die Primfaktorzerlegung von 108? Wir sehen

$$108 = 2 \cdot 54 = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 2^2 \cdot 3 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^3.$$

In der Primfaktorzerlegung kommt die Primzahl 2 zweimal und die Primzahl 3 dreimal vor. Diese Häufigkeiten heißen auch Exponenten der Primzahlen.

Man kann leicht eine große Menge von Primzahlen aufzählen. Aber wie viele dieser Zahlen gibt es eigentlich? Die Antwort scheint offensichtlich: Es gibt unendlich viele. Aber ist das so klar? Woher weiß man, dass es tatsächlich eine Primzahl gibt, die größer ist als 10 Milliarden? Oder größer als 10 Milliarden Milliarden? Wir formulieren einen Beweis und stellen dabei gleichzeitig eine wichtige Strategie im Beweisen vor:

Satz 2.5. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

[9] Tatsächlich werden negative Primzahlen in gewissen Bereichen der Zahlentheorie ebenso definiert wie die positiven und als völlig gleichwertig angesehen. Für uns sind Primzahlen aber (zunächst) immer positiv.

Beweis. Obwohl die Behauptung offensichtlich klingt, tut man sich schwer, einen direkten Beweis anzugeben. Man könnte versuchen, immer größere Primzahlen zu konstruieren, doch dieser Ansatz ist schwer umzusetzen. Wir verwenden daher eine andere Strategie, die in sehr vielen Fällen äußerst effektiv ist: den indirekten Beweis. Die Idee ist anzunehmen, dass die Behauptung falsch ist und diese Annahme zu einem Widerspruch zu führen. Kommen wir also zum Beweis:

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Das heißt, es gibt nur endlich viele Primzahlen. Sagen wir, die Anzahl der Primzahlen sei n. Wir bezeichnen die Primzahlen mit $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ (das heißt p_1 ist die erste Primzahl, also $p_1 = 2$, p_2 ist die zweite Primzahl, also $p_2 = 3$ und so weiter, bis hin zur letzten Primzahl p_n).

Wir wollen einen Widerspruch erzeugen. Dazu betrachten wir die Zahl

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Die Zahl P ist durch keine der Zahlen p_1 bis p_n teilbar, da sie um eins größer ist als ein Vielfaches von jeder dieser Zahlen. Da p_1 bis p_n aber nach unserer Annahme alle existierenden Primzahlen sind, folgt, dass P durch keine Primzahl teilbar ist. Das kann aber nicht sein, da P nach Satz 2.3 eine Primfaktorzerlegung besitzt. Widerspruch!

Da unsere Annahme zu einem Widerspruch geführt hat, muss die Annahme falsch gewesen sein. Das heißt, dass die Behauptung richtig ist. □

Nun wenden wir uns einem typischen Aufgabenformat zu Primzahlen zu:

Aufgabe 2.6. Für welche positiven ganzen Zahlen n ist die Zahl $8^n - 1$ eine Primzahl?

Lösung. Eines der ersten Dinge, die man bei einer solchen Aufgabe immer tun sollte, ist ein paar Beispiele durchzurechnen. In diesem Fall ist es sicherlich hilfreich, die Zahl $8^n - 1$ für $n = 1, 2, \ldots, 5$ auszurechnen und jeweils zu überprüfen, ob eine Primzahl herauskommt. Tabelle 2.2 zeigt diese 5 Beispiele und gibt zu jedem Wert die Primfaktorzerlegung an.

n	$8^n - 1$	Primzahl?
1	7	ja
2	63	nein (denn $63 = 9 \cdot 7$)
3	511	nein (denn $511 = 7 \cdot 73$)
4	4095	nein (denn $4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$)
5	32767	nein (denn $32767 = 7 \cdot 31 \cdot 151$)

Tabelle 2.2: Beispielwerte für die Aufgabe.

Nur für $n = 1$ erhalten wir eine Primzahl, was die Vermutung nahelegt, dass $n = 1$ die einzige Zahl ist, für die $8^n - 1$ prim ist.

Ein genauerer Blick auf die Tabelle zeigt die folgende bemerkenswerte Tatsache: Für *jedes* n in der Tabelle ist $8^n - 1$ durch 7 teilbar. Könnten wir beweisen, dass diese Aussage sogar für alle positiven ganzen Zahlen n gilt, dann wäre die Aufgabe gelöst. Denn eine durch 7 teilbare Zahl ist nur dann prim, wenn sie gleich 7 ist – und das ist bei $8^n - 1$ offensichtlich nur für $n = 1$ der Fall.

Den schwierigen Teil der Aufgabe haben wir nun bereits geschafft, nämlich das Finden eines Ansatzes. Nun müssen wir beweisen, dass unsere Vermutung tatsächlich richtig ist. Dafür gibt es zum Beispiel die folgenden zwei Wege:

1. Wegen $8 \equiv 1 \pmod 7$ gilt $8^n - 1 \equiv 1^n - 1 = 1 - 1 = 0 \pmod 7$ für alle positiven ganzen Zahlen n. Das beweist bereits die Behauptung.

2. Um von einem n zum nächsten zu kommen, stellen wir fest:

   $$8^{n+1} - 1 = (8^n - 1) \cdot 8 + 7.$$

   Man sieht leicht: Wenn $8^n - 1$ durch 7 teilbar ist, dann ist auch $8^{n+1} - 1$ durch 7 teilbar. Da $8^1 - 1 = 7$ durch 7 teilbar ist, folgt somit, dass $8^n - 1$ für alle $n \geq 1$ durch 7 teilbar ist.

Bemerkung 2.7. Wir haben festgestellt, dass $8^n - 1$ immer durch 7 teilbar ist. Es gibt sogar eine Formel für das Ergebnis bei Division durch 7. Allgemein gilt nämlich für alle ganzen Zahlen a und für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n:

$$a^n - 1 = (a - 1) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}).$$

Diese Formel heißt *geometrische Summenformel* und wird später eine wichtige Rolle spielen.

2.2 ggT und kgV

In diesem Abschnitt führen wir zwei weitere wichtige Konzepte ein: den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache zweier ganzer Zahlen.

Definition 2.8. Der *größte gemeinsame Teiler* von zwei ganzen Zahlen a und b, notiert $\text{ggT}(a, b)$, ist die größte ganze Zahl, die a und b teilt.

Beispiel 2.9. a) Man sieht leicht, dass $\text{ggT}(9, 6) = 3$, denn die einzigen (positiven Teiler) von 9 sind 1, 3 und 9 und die Teiler von 6 sind 1, 2, 3 und 6, sodass 3 tatsächlich die größte Zahl ist, die 9 und 6 teilt.

b) Ähnlich findet man $\text{ggT}(12, 18) = 6$.

Es gibt einen besseren Weg, den größten gemeinsamen Teiler auszurechnen, als den soeben vorgestellten (alle Teiler bestimmen und vergleichen): Man schreibt sich die Primfaktorzerlegungen von a und b auf und nimmt alle in a und b gemeinsam vorkommenden Primzahlen. Ein Beispiel:

Beispiel 2.10. Wir berechnen erneut den größten gemeinsamen Teiler von 12 und 18. Man sieht $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ und $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Die gemeinsamen Primzahlen sind 2 und 3 (jeweils einmal), das heißt $\text{ggT}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$.

Ein ähnliches Konzept wie der größte gemeinsame Teiler ist das kleinste gemeinsame Vielfache:

Definition 2.11. Das *kleinste gemeinsame Vielfache* von zwei ganzen Zahlen a und b, notiert $\text{kgV}(a, b)$, ist die kleinste (positive) ganze Zahl, die durch a und durch b teilbar ist.

Beispiel 2.12. Man sieht leicht $\text{kgV}(12, 18) = 36$.

Wie den ggT kann man auch das kgV mittels der Primfaktorzerlegung ausrechnen: Man nimmt sich jeden Primfaktor so oft, wie er maximal in a oder b vorkommt.

Beispiel 2.13. Wir sehen, dass in $12 = 2^2 \cdot 3$ und $18 = 2 \cdot 3^2$ der Primfaktor 2 mit maximaler Häufigkeit 2 (in 12) und der Primfaktor 3 ebenfalls mit maximaler Häufigkeit 2 (in 18) auftritt. Also ist $\text{kgV}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen ggT und kgV:

Satz 2.14. *Für alle positiven ganzen Zahlen a und b gilt:*

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b.$$

Wir beweisen den Satz hier nicht. Man kann sich mithilfe der Primfaktorzerlegung überlegen, warum er stimmt.

2.3 Lineare Gleichungen in den ganzen Zahlen

Wir betrachten die folgende Aufgabe:

Aufgabe 2.15. Auf einem Tisch liegen 100 Münzen. Nun möchte man diese Münzen in 6er- und 8er-Stapeln sortieren. Ist das möglich? Ändet sich die Antwort, wenn man stattdessen 6er- und 9er-Stapel nehmen will?

Man findet die folgenden Antworten auf die beiden Fragen:

- Man kann die 100 Münzen in 6er- und 8er-Stapeln sortieren, zum Beispiel mit 10 6er-Stapeln und 5 8er-Stapeln.
- Man kann die 100 Münzen nicht in 6er- und 9er-Stapeln sortieren, da jede solche Sortierung eine durch 3 teilbare Anzahl von Münzen enthält und 100 nicht durch 3 teilbar ist.

Bezeichnen wir mit x die Anzahl der 6er-Stapel und mit y die Anzahl der 8er-Stapel, dann kann man den ersten Teil der Aufgabe auch wie folgt formulieren: Gibt es nichtnegative ganze Zahlen x und y, sodass

$$6x + 8y = 100$$

erfüllt ist? Als eine mögliche Lösung erhalten wir $x = 10, y = 5$. Der zweite Teil der Aufgabe ist die Frage, ob man nichtnegative ganze Zahlen x und y findet, sodass

$$6x + 9y = 100$$

gilt.

Beide Gleichungen sehen sehr ähnlich aus, sie haben beide die Form $ax + by = z$ für ganze Zahlen a, b und z. Wir werden derartige, sogenannte *lineare Gleichungen*, genauer betrachten. Dabei stellen sich folgende sehr zentrale Fragen:

Frage 2.16. 1. Was muss für a, b und z gelten, damit man eine Lösung für x und y finden kann? Wir lassen dabei auch negative Werte für x und y zu.

2. Wie kann man eine Lösung für x und y finden?

Wir nähern uns der Antwort dieser Frage durch einfachere Fragen:

Frage 2.17. Für welche ganzen Zahlen z kann man die Gleichung $6x+8y=z$ lösen (das heißt ganze Zahlen x, y finden, die die Gleichung erfüllen)?

Man findet schnell ein paar Möglichkeiten für z wie zum Beispiel Tabelle 2.3 zeigt. Wir sehen, dass $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ alles mögliche Werte für z sind. Wir sehen außerdem, dass 2 der kleinste positive Wert für z ist, für den wir die Gleichung lösen können, denn $6x+8y$ ist immer gerade, das heißt $6x+8y=1$ ist nicht lösbar.

Dies führt zu der Vermutung, dass man $6x+8y=z$ dann und nur dann lösen kann, wenn z gerade ist.

z	x, y	z	x, y	z	x, y
100	$10, 5$	6	$1, 0$	10	$1, 2$
20	$2, 1$	8	$0, 1$	12	$2, 0$
28	$2, 2$	2	$-1, 1$	14	$1, 1$
0	$0, 0$	4	$-2, 2$	16	$0, 2$

Tabelle 2.3: Lösungen von $6x+8y=z$.

Um diese Vermutung zu beweisen, werfen wir einen genaueren Blick auf die Tabelle. Wir sehen, dass wir für $z=2$ die Lösung $-1, 1$ und für $z=4$ die Lösung $-2, 2$ haben. Man sieht außerdem schnell, dass man $z=6$ mit $-3, 3$ und $z=8$ mit $-4, 4$ erhalten kann. Dahinter scheint die Regel zu stecken, dass man $z=2k$ (k eine ganze Zahl) mit $x=-k, y=k$ lösen kann. Tatsächlich gilt:

$$z = 2k = -6k + 8k = 6 \cdot (-k) + 8 \cdot k.$$

Damit haben wir also gezeigt: Für alle geraden Zahlen z besitzt die Gleichung $6x+8y=z$ eine ganzzahlige Lösung. Für ungerade z gibt es keine Lösung.

Frage 2.18. Für welche ganzen Zahlen z kann man die Gleichung $z=6x+9y$ lösen?

Wie beim letzten Beispiel erstellen wir uns zunächst eine Tabelle mit einigen Lösungen, siehe Tabelle 2.4.

z	x, y	z	x, y
9	$0, 1$	3	$-1, 1$
6	$1, 0$	12	$2, 0$
15	$1, 1$	18	$0, 2$

Tabelle 2.4: Lösungen von $z=6x+9y$.

Man gelangt schnell zu der Vermutung, dass die Gleichung $6x+9y=z$ für alle durch drei teilbaren Zahlen z lösbar ist. Und tatsächlich, wenn wir einen ähnlichen Ansatz wie in vorigem Beispiel versuchen, dann sehen wir schnell, dass für $z=3k$ gilt:

$$z = 3k = -6k + 9k = 6 \cdot (-k) + 9 \cdot k,$$

das heißt $x=-k$, $y=k$ ist eine Lösung. Wir stellen außerdem fest, dass die so erhaltenen Lösungen Vielfache von der Lösung $-1, 1$ (im Fall $z=3$) sind. Tatsächlich kann man sich leicht überlegen, dass wenn man in $6x+9y$ die Werte von x und y ver-k-facht, sich auch der Wert von $6x+9y$ ver-k-facht. Da wir eine Lösung für $z=3$ gefunden haben, können wir für alle Vielfachen von $z=3$ eine Lösung finden!

Umgekehrt ist ersichtlich, dass $6x+9y$ für alle ganzen Zahlen x und y durch 3 teilbar ist, da $6x$ und $9y$ immer durch 3 teilbar sind. Man kann die Gleichung $6x+9y=z$ folglich dann und nur dann lösen, wenn z durch 3 teilbar ist.

Frage 2.19. Für welche ganzen Zahlen z kann man $8x+20y=z$ lösen?

Wir sehen zunächst, dass jedes solche z durch 4 teilbar sein muss, denn $8x$ und $20y$ sind immer durch 4 teilbar, und somit auch $8x+20y$ (für alle ganzen Zahlen x und y). Tatsächlich können wir $8x+20y=4$ lösen, zum Beispiel durch $x=-2$, $y=1$.

Mit einem ähnlichen Trick wie im vorigen Beispiel können wir dadurch $8x+20y=z$ für alle durch 4 teilbaren Zahlen z lösen: wir multiplizieren einfach die Lösung $x=-2$, $y=1$ mit einem geeigneten Vielfachen! Zum Beispiel ist $x=3\cdot(-2)$, $y=3\cdot 1$ eine Lösung für $8x+20y=3\cdot 4$ und allgemein ist $x=-2k, y=k$ eine Lösung für $8x+20y=4k$.

Das beanwortet die Frage: Die Gleichung $8x+20y=z$ ist genau für alle durch 4 teilbaren Zahlen z lösbar.

Wir betrachten nun wieder den allgemeinen Fall $ax+by=z$. Zunächst sehen wie analog zu obigen Beispielen, dass ax und by immer durch $\text{ggT}(a,b)$ teilbar sind (denn a und b sind durch $\text{ggT}(a,b)$ teilbar); folglich ist auch $ax+by$ immer durch $\text{ggT}(a,b)$ teilbar. Somit kann man $ax+by=z$ höchstens dann lösen, wenn z durch $\text{ggT}(a,b)$ teilbar ist.

Die interessante Frage ist: Kann man $ax+by=z$ tatsächlich *immer* dann lösen, wenn $\text{ggT}(a,b)$ ein Teiler von z ist? Die Antwort ist folgender Satz:

Satz 2.20. *Seien a,b,z ganze Zahlen. Dann kann man die Gleichung $ax+by=z$ dann und nur dann lösen (das heißt ganze Zahlen x und y finden, sodass die Gleichung gilt), wenn z durch $\text{ggT}(a,b)$ teilbar ist.*

Beweis. Wir haben oben bereits gezeigt, dass man $ax+by=z$ höchstens dann lösen kann, wenn z durch $\text{ggT}(a,b)$ teilbar ist. Es verbleibt also zu beweisen, dass man in diesem Fall tatsächlich eine Lösung finden kann.

Wir greifen ein bisschen aus dem nächsten Abschnitt vor und setzen voraus, dass man $ax+by=\text{ggT}(a,b)$ immer lösen kann (zum Beispiel kann man $6x+8y=2$ und $8x+20y=4$ lösen). Sei x,y eine solche Lösung und sei z eine beliebige Zahl, die durch $\text{ggT}(a,b)$ teilbar ist, das heißt $z=k\cdot\text{ggT}(a,b)$ für eine ganze Zahl k. Dann ist $x'=kx$, $y'=ky$ eine Lösung mit $ax'+by'=z$, wie man leicht durch Einsetzen feststellt. Das beweist die Behauptung. □

Mit dem Satz haben wir die Frage, für welche a,b und z eine Lösung existiert, beantwortet. Im nächsten Abschnitt werden wir zusätzlich eine Methode kennenlernen, mit der man eine Lösung für $ax+by=\text{ggT}(a,b)$ finden kann.

2.4 Der Euklidische Algorithmus

Die bis jetzt effizienteste Methode, den ggT von zwei ganzen Zahlen zu berechnen, benötigt die Primfaktorzerlegung der Zahlen. Aber gerade bei sehr großen Zahlen ist es sehr schwer, die Primfaktorzerlegung zu bestimmen[10]. Der euklidische Algorithmus ist ein alternatives Verfahren, um den ggT auszurechnen, das besonders bei großen Zahlen sehr schnell sein kann. Dieser Algorithmus basiert auf folgendem Satz:

Satz 2.21. *Seien a,b ganze Zahlen. Dann gilt $\text{ggT}(a,b)=\text{ggT}(a-b,b)=\text{ggT}(a,b-a)$, das heißt der größte gemeinsame Teiler ändert sich nicht, wenn man eine der Zahlen von der anderen subtrahiert.*

Beweis. Man überlegt sich, dass die gemeinsamen Teiler von a und b die gleichen wie die von $a-b$ und b sind, denn wenn eine Zahl a und b teilt, dann teilt sich auch $a-b$ und b; und wenn sie $a-b$ und b teilt, dann auch $a=(a-b)+b$. Da die gemeinsamen Teiler von a,b und $a-b,b$ übereinstimmen, ist auch der größte gemeinsame Teiler von den beiden Paaren gleich. Der Beweis für $\text{ggT}(a,b)=\text{ggT}(a,b-a)$ geht genauso. □

Zwei Beispiele:

Beispiel 2.22. a) Durch mehrmaliges Subtrahieren sehen wir:

$$\begin{aligned}\text{ggT}(12,18) &= \text{ggT}(12,18-12)=\text{ggT}(12,6)=\text{ggT}(12-6,6)=\text{ggT}(6,6)=\text{ggT}(6-6,6)\\ &= \text{ggT}(0,6)=6.\end{aligned}$$

Wir hätten auch schon bei $\text{ggT}(6,6)$ aufhören können, denn $\text{ggT}(6,6)$ ist offensichtlich 6. Wir setzen das Verfahren aber immer so weit fort, bis eine der Zahlen 0 ist.

b) Ähnlich kann man berechnen:

$$\begin{aligned}\text{ggT}(105,36) &= \text{ggT}(69,36)=\text{ggT}(33,36)\\ &= \text{ggT}(33,3)\\ &= \text{ggT}(30,3)=\text{ggT}(27,3)=\cdots=\text{ggT}(3,3)=\text{ggT}(0,3)\\ &= 3.\end{aligned}$$

[10] Moderne Verschlüsselungsverfahren basieren auf der Tatsache, dass Computer nicht in der Lage sind, sehr große Zahlen in Primfaktoren zu zerlegen.

In jeder Zeile dieser Rechnung wurde mehrmals entweder die linke von der rechten oder die rechte von der linken Zahl abgezogen. Zum Beispiel wurde in der ersten Zeile zwei mal die Zahl 36 von der Zahl 105 abgezogen und in der dritten Zeile wurde elf mal die Zahl 3 von der Zahl 33 subtrahiert. Anstatt jede Subtraktion einzeln auszuführen, kann man auch sofort ein geeignetes Vielfaches nehmen. Wir ziehen 36 genau zwei mal von 105 ab, da 36 zwei mal in 105 „passt" (das heißt das Ergebnis von 105 : 36 ist 2). Wir können die Rechnung also auch schreiben als:

$$\begin{aligned} 105 &= 2 \cdot 36 + 33, \\ 36 &= 1 \cdot 33 + \underline{3}, \\ 33 &= 11 \cdot \underline{3} + 0. \end{aligned}$$

Die Rechnung im vorigen Beispiel ist bereits der *euklidische Algorithmus* zur Bestimmung des ggT. Zur Verdeutlichung ein weiteres Beispiel:

Beispiel 2.23. Wir berechnen den ggT von 767 und 598:

$$\begin{aligned} 767 &= 1 \cdot 598 + 169, \\ 598 &= 3 \cdot 169 + 91, \\ 169 &= 1 \cdot 91 + 78, \\ 91 &= 1 \cdot 78 + \underline{13}, \\ 78 &= 6 \cdot \underline{13} + 0. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $\mathrm{ggT}(767, 598) = 13$.

Der euklidische Algorithmus ist nicht nur eine Methode, den ggT von zwei Zahlen auszurechnen, er hilft auch beim Lösen lineare Gleichungen in den ganzen Zahlen (siehe letzter Abschnitt). Wir hatten für den Beweis von Satz 2.20 benutzt, dass man die Gleichung $ax + by = \mathrm{ggT}(a, b)$ immer lösen kann. Der euklidische Algorithmus ermöglicht es uns nicht nur zu zeigen, dass das tatsächlich möglich ist, sondern stellt auch einen Weg bereit, eine Lösung zu finden.

Wir demonstrieren das an den Zahlen aus vorigem Beispiel.

Beispiel 2.24. In Beispiel 2.23 haben wir herausgefunden, dass $\mathrm{ggT}(767, 598) = 13$. Wir wollen die dortige Rechnung benutzen, um eine Lösung für $767x + 590y = 13$ zu finden. Zunächst einmal stellen wir alle dortigen Gleichungen um:

$$\begin{aligned} 13 &= 91 - 1 \cdot 78, && (2.1) \\ 78 &= 169 - 1 \cdot 91, && (2.2) \\ 91 &= 598 - 3 \cdot 169, && (2.3) \\ 169 &= 767 - 1 \cdot 598. && (2.4) \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir die so erhaltenen Gleichungen nacheinander ein:

$$\begin{aligned} 13 &\overset{(2.1)}{=} 91 - 1 \cdot 78 \\ &\overset{(2.2)}{=} 91 - 1 \cdot (169 - 1 \cdot 91) = 2 \cdot 91 - 1 \cdot 169 \\ &\overset{(2.3)}{=} 2 \cdot (598 - 3 \cdot 169) - 1 \cdot 169 = 2 \cdot 598 - 7 \cdot 169 \\ &\overset{(2.4)}{=} 2 \cdot 598 - 7 \cdot (767 - 1 \cdot 598) = 9 \cdot 598 - 7 \cdot 767. \end{aligned}$$

Wir sehen: Eine Lösung für $767x + 598y = 13$ ist $x = -7$, $y = 9$.

Damit haben wir die Frage 2.16 vollständig beantwortet.

2.5 Teilerfremdheit

Häufig steht man vor der Aufgabe, für eine bestimmte Zahl zu beweisen, dass sie durch eine gewisse andere Zahl teilbar ist. Mithilfe der Teilerfremdheit lässt sich dieses Problem sehr häufig auf „kleinere" Teilprobleme reduzieren, wie wir im Folgenden sehen werden. Zunächst formulieren wir den folgenden wichtigen Satz:

Satz 2.25. *Wenn eine ganze Zahl durch zwei ganze Zahlen a und b teilbar ist, dann ist sie auch durch* $\mathrm{kgV}(a, b)$ *teilbar.*

Wir beweisen diesen Satz nicht, man kann ihn sich aber mit der Primfaktorzerlegung überlegen. Hier ein Beispiel:

Beispiel 2.26. Wenn eine Zahl durch 6 und durch 8 teilbar ist, dann ist sie auch durch 24 teilbar, denn $24 = \mathrm{kgV}(6, 8)$. Wenn dir das nicht logisch erscheint, dann probiere ein paar Beispiele.

Der obige Satz kann zwar hilfreich sein, aber das kgV ist nicht immer leicht zu bestimmen. Einen besseren Satz bekommt man, wenn man eine zusätzliche Eigenschaft von a und b fordert, sogenannte Teilerfremdheit:

Definition 2.27. Zwei ganze Zahlen a und b heißen *teilerfremd*, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben, das heißt, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Es gibt einen einfachen Weg herauszufinden, ob zwei Zahlen teilerfremd sind: Man schaut sich ihre Primfaktorzerlegungen an und überprüft, ob es eine Primzahl gibt, die in beiden vorkommt. Wenn nicht, dann sind die Zahlen teilerfremd.

Beispiel 2.28. a) Die Zahlen 32 und 39 sind teilerfremd, denn es gilt $32 = 2^5$ und $39 = 3 \cdot 13$, das heißt keine Primzahl kommt in beiden Zahlen vor.

b) Die Zahlen 18 und 27 sind nicht teilerfremd, denn beide sind durch 3 teilbar.

Für teilerfremde Zahlen gibt es den folgenden hilfreichen Satz:

Satz 2.29. *Ist eine ganze Zahl durch zwei teilerfremde ganze Zahlen a und b teilbar, dann ist sie auch durch $a \cdot b$ teilbar.*

Beweis. Wenn a und b teilerfremd sind, dann ist $\mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b$. Somit folgt die Behauptung aus Satz 2.25. □

Beispiel 2.30. a) Wenn eine Zahl durch 3 und durch 8 teilbar ist, dann ist sie auch durch 24 teilbar, denn $24 = 3 \cdot 8$ und die Zahlen 3 und 8 sind teilerfremd.

b) Die Teilerfremdheit ist sehr wichtig. Zum Beispiel stimmt es nicht, dass aus der Teilbarkeit durch 6 und durch 8 auch die Teilbarkeit durch $48 = 6 \cdot 8$ folgt. Ein Gegenbeispiel ist 24, denn $6 \mid 24$, $8 \mid 24$, aber $48 \nmid 24$.

c) Die bekannte Teilbarkeitsregel durch 6 basiert auf diesem Prinzip: Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist, das heißt wenn sie gerade ist und 3 ein Teiler ihrer Quersumme ist.

d) In Aufgabe 1.28 haben wir verwendet, dass eine Zahl durch 12 teilbar ist, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.

Wir zeigen eine weitere Anwendung:

Aufgabe 2.31. Für welche Primzahlen p ist die Zahl $p^2 - 1$ durch 24 teilbar?

Lösung. Das erste, was man zum Lösen einer Aufgabe immer tun sollte, ist ein paar Beispiele auszurechnen. Tabelle 2.5 zeigt einige Beispiele.

p	$p^2 - 1$	$24 \mid p^2 - 1$?	p	$p^2 - 1$	$24 \mid p^2 - 1$?
2	3	nein	13	168	ja
3	8	nein	17	288	ja
5	24	ja	19	360	ja
7	48	ja	23	528	ja
11	120	ja	29	840	ja

Tabelle 2.5: Beispielwerte für $p^2 - 1$.

Die Tabelle führt schnell zu der Vermutung, dass $p^2 - 1$ immer dann durch 24 teilbar ist, wenn $p^2 - 1$ größer oder gleich 24 ist, das heißt, wenn $p \geq 5$.

Zum Beweis verwenden wir die Tatsache, dass eine Zahl durch 24 teilbar ist, wenn sie durch 3 und durch 8 teilbar ist. Wir können den Beweis also in zwei Schritte zerteilen:

Teilbarkeit durch 3. Wenn p eine Primzahl größer oder gleich 5 ist, dann ist p nicht durch 3 teilbar. Folglich ist der Rest von p bei Division durch 3 entweder 1 oder 2, das heißt $p \equiv 1 \pmod 3$ oder $p \equiv 2 \pmod 3$. Im ersten Fall ist $p^2 - 1 \equiv 1^2 - 1 = 0 \pmod 3$ und im zweiten Fall ist $p^2 - 1 \equiv 2^2 - 1 = 3 \equiv 0 \pmod 3$, das heißt wir haben auf jeden Fall $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$, was nichts anderes heißt als dass $p^2 - 1$ durch 3 teilbar ist[11].

Es gibt auch einen Weg ohne Zahlenkongruenzen: Durch Ausmultiplizieren stellt man fest, dass gilt:

$$p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1).$$

Die Zahlen $p-1, p, p+1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen auf dem Zahlenstrahl, folglich ist eine von ihnen durch 3 teilbar. Da p aber nicht durch 3 teilbar ist, muss entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar sein. In beiden Fällen ist das Produkt $(p-1) \cdot (p+1)$ durch 3 teilbar, da einer der Faktoren durch 3 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 8. Wir wählen einen ähnlichen Weg wie für die Teilbarkeit durch 3: Da p eine Primzahl größer oder gleich 5 ist, ist p ungerade. Folglich hat p einen der Reste $1, 3, 5, 7$ bei Division durch 8 (bei allen anderen Resten wäre p gerade). Für alle diese Reste ist $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$, wie man nachrechnen kann (zum Beispiel, wenn $p \equiv 5 \pmod 8$, dann ist $p^2 - 1 \equiv 5^2 - 1 = 24 \equiv 0 \pmod 8$). Folglich ist $p^2 - 1$ durch 8 teilbar.

Alternativ kann man folgenden Beweis führen: Wir stellen wieder fest, dass $p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1)$. Da p ungerade ist, sind sein Vorgänger und sein Nachfolger, also $p-1$ und $p+1$, gerade. Wir wissen sogar, dass eine dieser beiden Zahlen durch 4 teilbar ist, denn unter den vier aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1, p, p+1, p+2$ ist eine durch 4 teilbar, aber p und $p+2$ sind ungerade. Da also eine der Zahlen $p-1, p+1$ durch 4 und die andere durch 2 teilbar ist, ist das Produkt $(p-1) \cdot (p+1)$ durch 8 teilbar.

Die soeben gelöste Aufgabe stammt aus der dritten Stufe der 36. Matheolympiade und richtete sich an Neuntklässler!

2.6 Teiler

In diesem Abschnitt wollen wir einen genaueren Blick auf die (positiven) Teiler einer ganzen Zahl werfen. Wir interessieren uns dabei vor allem dafür, wie man einer Zahl n auf einfache Weise ansehen kann, wie viele Teiler sie hat und wie man diese Teiler schnell finden kann. Dazu schauen wir uns zunächst ein paar Beispiele an:

Beispiel 2.32. Wir betrachten als erstes den Fall, dass unsere Zahl n eine Primzahlpotenz ist.

a) Was sind die Teiler von $3^3 = 27$? Man findet schnell heraus, dass die Teiler $1, 3, 9$ und 27 sind; es gibt also 4 Teiler.

b) Was sind die Teiler von $2^5 = 32$? Es sind die Zahlen $1, 2, 4, 8, 16$ und 32, also insgesamt 6 Teiler.

c) Was sind die Teiler von $5^2 = 25$? Wir finden 3 Teiler, nämlich $1, 5$ und 25.

Wenn man in vorigem Beispiel jeweils den Exponenten der Primzahl mit der Anzahl der Teiler vergleicht, dann kommt man schnell zu folgender Vermutung:

Vermutung 2.33. *Wenn n eine Primzahlpotenz ist, dann ist die Anzahl der (positiven) Teiler von n gleich dem Exponenten der Primzahl plus* 1.

Um zu verstehen, wieso das stimmt, schauen wir uns die Teiler der Primzahlpotenzen nochmal genauer an: Die Teiler von $2^5 = 32$ sind $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$ und $32 = 2^5$. Wir sehen also: Zu jedem möglichen Exponenten zwischen (einschließlich) 0 und 5 gibt es einen Teiler, nämlich 2 hoch diesen Exponenten. Da es 6 Zahlen zwischen 0 und 5 gibt, nämlich $0, 1, 2, 3, 4$ und 5, gibt es 6 Teiler.

Ähnlich ist es mit den Teilern von $3^3 = 27$: Die Teiler sind $1 = 3^0, 3 = 3^1, 9 = 3^2$ und $27 = 3^3$, das heißt für jeden möglichen Exponenten zwischen 0 und 3 gibt es den Teiler 3 hoch diesen Exponenten.

Wenn wir also eine allgemeine Primzahlpotenz p^k betrachten, dann scheint es für jede Zahl zwischen einschließlich 0 und k einen Teiler zu geben, nämlich p hoch diese Zahl. Dadurch erhält man genau $k+1$ Teiler, wie in unserer Vermutung.

Was passiert bei Zahlen, die keine Primzahlpotenz sind?

Beispiel 2.34. a) Was sind die Teiler von 18? Es sind $1, 2, 3, 6, 9$ und 18, also 6 Teiler. Tabelle 2.6 zeigt zu jedem der 6 Teiler die Primfaktorzerlegung und die darin auftretenden Exponenten von 2 und 3.

[11] Nebenbei bemerkt haben wir nur verwendet, dass p nicht durch 3 teilbar ist. p muss gar nicht unbedingt eine Primzahl sein, damit $p^2 - 1$ durch 3 teilbar ist.

Teiler	Primfaktoren	Exponenten
1	$2^0 \cdot 3^0$	0,0
2	$2^1 \cdot 3^0$	1,0
3	$2^0 \cdot 3^1$	0,1
6	$2^1 \cdot 3^1$	1,1
9	$2^0 \cdot 3^2$	0,2
18	$2^1 \cdot 3^2$	1,2

Tabelle 2.6: Teiler von 18.

Wir sehen, dass es zu jedem Paar a, b von Exponenten mit a gleich 0 oder 1 und b gleich 0, 1 oder 2 einen Teiler von 18 gibt und dass wir alle Teiler von 18 auf diese Weise konstruieren können. Das liegt daran, dass die Primfaktorzerlegung jedes Teilers von 18 die gleichen Primzahlen wie 18 enthält (also keine neuen Primzahlen hinzukommen können), aber mit eventuell kleineren Exponenten als in 18.

Es gibt 6 Möglichkeiten für solche Paare, nämlich 2 Möglichkeiten für den Exponenten von 2 und bei jeder dieser Möglichkeiten 3 Möglichkeiten für den Exponenten von 3, das heißt insgesamt $2 \cdot 3$ Möglichkeiten[12].

b) Was sind die Teiler von 45? Tabelle 2.7 zeigt alle Teiler und jeweils ihre Primfaktorzerlegung und die auftretenden Exponenten.

Teiler	Primfaktoren	Exponenten
1	$3^0 \cdot 5^0$	0,0
3	$3^1 \cdot 5^0$	1,0
5	$3^0 \cdot 5^1$	0,1
9	$3^2 \cdot 5^0$	2,0
15	$3^1 \cdot 5^1$	1,1
45	$3^2 \cdot 5^1$	2,1

Tabelle 2.7: Teiler von 45.

Ähnlich wie im vorigen Beispiel sehen wir, dass wir zu jedem Teiler ein Paar a, b von Exponenten aufschreiben können, wobei a der Exponent von 3 und b der Exponent von 5 ist. Diesmal haben wir für a die Möglichkeiten 0, 1 und 2 und für b die Möglichkeiten 0 und 1. Insgesamt erhalten wir dadurch $6 = 3 \cdot 2$ Paare.

In beiden obigen Beispielen konnten wir die Anzahl der Teiler durch Zählen aller möglichen Paare von Primzahlexponenten berechnen. Dabei gibt es für jeden Exponenten die Möglichkeiten $0, 1, \ldots, k$, wobei k der Exponent der jeweiligen Primzahl in der Ausgangszahl ist. Es gibt also für jeden Exponenten genau $k+1$ Möglichkeiten. Das führt zu folgendem Satz:

Satz 2.35. *Man erhält die Anzahl der (positiven) Teiler einer positiven ganzen Zahl n, indem man in der Primfaktorzerlegung von n jeden Primzahlexponenten um* 1 *erhöht und die Ergebnisse multipliziert. Jeden Teiler von n bekommt man, indem man in der Primzahlzerlegung von n einige Exponenten der Primzahlen verkleinert.*

Hier noch zwei Beispiele:

Beispiel 2.36. a) Wie viele Teiler hat 36? Es gilt $36 = 2^2 \cdot 3^2$, die Exponenten sind somit 2 und 2. Wir erhöhen beide Exponenten jeweils um 1 und multiplizieren die Ergebnisse. Dadurch erhalten wir $(2+1) \cdot (2+1) = 9$, das heißt, 36 hat 9 Teiler.

b) Wie viele Teiler hat 104? Es gilt $104 = 2^3 \cdot 13^1$, die Exponenten sind also 3 und 1. Nach dem Satz hat 104 folglich $(3+1) \cdot (1+1) = 8$ Teiler. Wir können diese Teiler explizit angeben, indem wir in der Primfaktorzerlegung $2^3 \cdot 13^1$ manche der Exponenten verringern. Dadurch erhalten wir die Teiler $2^0 \cdot 13^0 = 1$, $2^1 \cdot 13^0 = 2$, $2^2 \cdot 13^0 = 4$, $2^3 \cdot 13^0 = 8$, $2^0 \cdot 13^1 = 13$, $2^1 \cdot 13^1 = 26$, $2^2 \cdot 13^1 = 52$ und $2^3 \cdot 13^1 = 104$.

[12] Dieses Abzählen aller Möglichkeiten für die Paare a, b ist ein grundlegendes kombinatorisches Argument. Wir werden uns solche Argumente genauer ansehen, wenn wir beim Thema „Kombinatorik“ sind.

3 Logik

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einem sehr fundamentalen Teilgebiet der Mathematik: der Logik. Grob gesagt beschäftigt sich die Logik mit der Frage, was Aussagen (wie zum Beispiel „3 ist eine Primzahl“) sind und auf welche Art man aus gegebenen Aussagen neue Aussagen folgern kann. In gewissen Sinne ist die Logik also eine Art „Anleitung“ für die Mathematik: alle Sätze und Beweise der Mathematik sind den strengen Regeln der Logik unterworfen.

Wir werden im Kurs einen kleinen Einblick in die Logik gewinnen.

3.1 Aussagen

Der wichtigste Begriff in der Logik ist die Aussage. Hier eine Definition:

Definition 3.1. Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Das klingt erstmal sehr einfach. Man kann aber tatsächlich einige interessante Beispiele betrachten:

Beispiel 3.2. a) Ist „3 ist eine Primzahl“ eine Aussage? Ja, denn dieser Satz ist wahr.

b) Ist „4 ist eine Primzahl“ eine Aussage? Ja, denn dieser Satz ist falsch.

c) Ist „Heute scheint die Sonne“ eine Aussage? Ja, denn dieser Satz ist entweder wahr oder falsch. Hier muss man aber bereits ein bisschen aufpassen. Zuallererst muss man sich fragen, was es denn heißt, dass die Sonne scheint. Muss der Himmel wolkenlos sein? Wie definiert man überhaupt Wolke? Was ist, wenn nur ein kleines Wölkchen am Himmel ist? Auf solche Probleme stößt man immer, wenn man versucht alltägliche Dinge mit der Mathematik zu beschreiben. Mathematiker beschränken sich mit ihren Aussagen daher normalerweise auf rein mathematische Objekte, wo alles schön sauber und eindeutig definiert ist. Wenn man eins seiner mathematischen Augen zudrückt, dann kann man aber auch Aussagen aus dem Alltag mathematisch untersuchen.

   Ein weiterer zu beachtender Fakt ist, dass der Satz seinen Wahrheitswert jeden Tag ändern kann.

d) Ist „Morgen scheint die Sonne“ eine Aussage? Ja, denn dieser Satz ist entweder wahr oder falsch, auch wenn wir heute noch nicht wissen, was der Wahrheitsgehalt ist.

e) Ist der Satz „Jede gerade natürliche Zahl größer oder gleich 4 kann man als Summe von zwei Primzahlen schreiben“ eine Aussage? Ja, denn sie ist entweder wahr oder falsch. Das interessante an dieser Aussage ist, dass bis heute kein Mathematiker weiß, ob sie richtig ist. Man hat natürlich schon sehr viele Zahlen mit dem Computer durchprobiert und hat bislang kein Gegenbeispiel gefunden, sodass die meisten Mathematiker denken, dass die Aussage stimmt. Trotzdem hat noch keiner einen Beweis finden können.

f) Ist „Dieser Satz ist falsch“ eine Aussage? Nein! Denn wenn der Satz eine Aussage wäre, dann wäre er entweder wahr oder falsch. Angenommen, er ist wahr. Daraus folgt aber, dass er falsch ist. Angenommen, er ist falsch. Daraus folgt aber, dass er wahr ist. Beide Möglichkeiten führen also zum Widerspruch!

3.2 Verknüpfung von Aussagen

Aus gegebenen Aussagen können wir neue Aussagen zusammenbauen. Das nennt man auch „verknüpfen“ der Aussagen:

Definition 3.3. Seien A und B zwei beliebige Aussagen. Dann definieren wir die folgenden neuen Aussagen:

$$\begin{aligned}
\neg A &= \text{„}A\text{ ist falsch“} = \text{„Nicht }A\text{“},\\
A \wedge B &= \text{„}A\text{ und }B\text{ sind richtig“} = \text{„}A\text{ und }B\text{“},\\
A \vee B &= \text{„}A\text{ oder }B\text{ ist richtig“} = \text{„}A\text{ oder }B\text{“},\\
A \Rightarrow B &= \text{„Wenn }A\text{ richtig ist, dann ist auch }B\text{ richtig“} = \text{„Aus }A\text{ folgt }B\text{“},\\
A \Leftrightarrow B &= \text{„}A\text{ ist genau dann richtig, wenn }B\text{ richtig ist“} = \text{„}A\text{ ist äquivalent zu }B\text{“}.
\end{aligned}$$

Die Tabelle 3.8 zeigt den Wahrheitswert der verknüpften Aussagen abhängig von dem Wahrheitswert der Aussagen A und B.

Solche Tabellen nennt man auch *Wahrheitswertetabellen*. Die unterstrichenen Einträge sind diejenigen, die ziemlich überraschend sein können: In der Mathematik ist die Aussage „A oder B ist wahr“ richtig, wenn

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Tabelle 3.8: Wahrheitswertetabellen für die Verknüpfungen.

A und B wahr sind. Das unterscheidet sich von der Umgangssprache, wo man mit „oder" normalerweise „entweder oder" meint.

Außerdem interessant ist, dass die Aussage „Wenn A richtig ist, dann ist auch B richtig" automatisch richtig ist, wenn A falsch ist. Das heißt aus einer falschen Aussage kann man alles folgern! Zum Beispiel ist die Aussage „Wenn 4 eine Primzahl ist, dann sind alle Dreiecke gleichseitig" eine wahre Aussage.

Beispiel 3.4. Sei n eine ganze Zahl. Wir betrachten die drei Aussagen

$$\begin{aligned}
A &= \text{„}n\text{ ist durch 2 teilbar"},\\
B &= \text{„}n\text{ ist durch 3 teilbar"},\\
C &= \text{„}n\text{ ist durch 6 teilbar"}.
\end{aligned}$$

Daraus können wir neue Aussagen erzeugen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\neg C &= \text{„}n\text{ ist nicht durch 6 teilbar"},\\
A \wedge B &= \text{„}n\text{ ist durch 2 und 3 teilbar"},\\
C \Rightarrow A &= \text{„Wenn }n\text{ durch 6 teilbar ist, dann ist }n\text{ auch durch 2 teilbar"},\\
C \Leftrightarrow (A \wedge B) &= \text{„}n\text{ ist genau dann durch 6 teilbar, wenn }n\text{ durch 2 und durch 3 teilbar ist"},\\
(A \vee B) \Rightarrow C &= \text{„Wenn }n\text{ durch 2 oder 3 teilbar ist, dann ist }n\text{ durch 6 teilbar"}.
\end{aligned}$$

Die Aussagen $C \Rightarrow A$ und $C \Leftrightarrow (A \wedge B)$ sind auf jeden Fall wahr, egal welche Zahl n wir uns gewählt haben. Bei allen anderen Aussagen hängt der Wahrheitswert von n ab. Zum Beispiel ist die Aussage $(A \vee B) \Rightarrow C$ wahr, wenn n nicht durch 2 oder 3 teilbar ist, weil dann $A \vee B$ falsch ist und man aus etwas Falschem alles folgern kann.

3.3 Äquivalenz von Aussageformeln

Eine interessante Frage ist, auf welche Weise man gegebene Aussagen durch Aussagen ersetzen kann, die auf jeden Fall den gleichen Wahrheitswert haben. Was damit genau gemeint ist, zeigt die folgende Definition:

Definition 3.5. Eine *Aussagenformel* ist eine Formel mit Aussagenvariablen[13] $A, B, C, \ldots$ und Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Zwei Aussagenformeln heißen *äquivalent*, wenn sie für alle Möglichkeiten, die Aussagenvariablen mit bestimmten Aussagen zu belegen, den gleichen Wahrheitswert haben. Wir schreiben dann $F_1 \equiv F_2$, wobei F_1 und F_2 die beiden Aussagenformeln sind.

Beispiele für Aussagenformeln sind also $A \wedge (B \vee C)$ und $\neg(A \Rightarrow B)$. Wir untersuchen ein paar Beispiele auf Äquivalenz:

Beispiel 3.6. a) Sind die Aussagenformeln $A \vee B$ und $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ äquivalent? Um eine Idee zu bekommen, formulieren wir zunächst beide Aussagenformeln als Satz: Die Formel $A \vee B$ heißt „A oder B ist richtig" und die Formel $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ heißt „Es stimmt nicht, dass A und B falsch sind". Die beiden Formeln klingen also gleichwertig (das heißt äquivalent). Um das ganz exakt zu beweisen, benutzen wir eine Wahrheitswertetabelle, wie in Tabelle 3.9 zu sehen.

Wichtig sind in dieser Tabelle nur die Ergebnisse in den unterstrichenen Spalten. Die Spalten dazwischen sind nur eine Hilfestellung, um die Wahrheitswerte Schritt für Schritt zu bestimmen.

Die Tabelle zeigt für jede mögliche Kombination von Wahrheitswerten für A und B, welchen Wahrheitswert die Formeln $A \vee B$ und $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ haben und dieser Wahrheitswert ist in jedem Fall gleich. Somit sind die Formeln äquivalent, wie zu zeigen war.

[13] Mit *Aussagenvariable* ist gemeint, dass wir diese Variablen durch beliebige Aussagen ersetzen können.

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w
f	w	w	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	f

Tabelle 3.9: Wahrheitswertetabelle für $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

b) Sind die Aussagenformeln $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ äquivalent? Nein, sind sie nicht. Wenn zum Beispiel A wahr und B falsch ist, dann ist $B \Rightarrow A$ richtig, aber $A \Rightarrow B$ falsch. Man kann sich auch anschaulich sehr gut überlegen, warum die beiden Formeln nicht gleichwertig sind. Zum Beispiel ist „Wenn das Dreieck gleichseitig ist, dann ist es auch gleichschenklig“ für jedes Dreieck richtig, aber die Umkehrung „Wenn das Dreieck gleichschenklig ist, dann ist es auch gleichseitig“ stimmt nicht immer.

3.4 Das Curry-Paradoxon

Ein Paradoxon ist etwas, das auf den ersten Blick so wirkt, als hätte man einen Widerspruch in der Mathematik gefunden. Bei genauerem Hinsehen entpuppen sich Paradoxien aber als geschickt getarnte Falschaussagen (bzw. falsche Beweise). Wir werden uns ein Paradoxon aus der Logik ansehen, das sogenannte Curry-Paradoxon.

Dieses Paradoxon besagt, dass man jede beliebige Aussage A beweisen kann. Also zum Beispiel die Aussage A = „4 ist eine Primzahl“. Der Beweis geht folgendermaßen:

„Beweis“. Wir betrachten die folgende Aussage B:

$$\begin{aligned} B &= \text{„Wenn diese Aussage wahr ist, dann stimmt auch } A\text{“} \\ &= B \Rightarrow A. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass B nicht falsch sein kann. Da B von der Form $B \Rightarrow A$ ist, kann man in der Wahrheitswertetabelle 3.8 für „$\Rightarrow$“ ablesen, dass diese Aussage nur dann falsch sein kann, wenn B wahr ist und A falsch. Das führt aber zu einem Widerspruch, denn B kann nicht zugleich falsch und wahr sein.

Folglich ist B eine wahre Aussage. Daraus, dass B und somit auch $B \Rightarrow A$ wahr ist, folgt, dass A wahr ist. □

Offensichtlich stimmt etwas mit diesem Beweis nicht, denn nicht jede Aussage A ist wahr. Aber wo ist der Fehler?

Wenn man ein bisschen darüber nachdenkt, kommt man zu der Frage: Was ist überhaupt der Wahrheitswert von B? In dem „Beweis“ haben wir gezeigt, dass B nicht falsch sein kann. Der Widerspruch (dass A wahr ist) zeigt nichts anderes als dass B auch nicht wahr sein kann. Die logische Konsequenz ist also, dass B gar keine Aussage ist!

Diese Auflösung betont noch einmal, dass nicht jeder Satz, den man hinschreiben kann, automatisch wahr oder falsch sein muss. Das ist der Grund, weshalb man den Begriff „Aussage“ definiert. Alle Nicht-Aussagen haben keine sinnvolle Anwendung in der Mathematik: die Mathematik weiß gar nicht, was eine Nicht-Aussage ist und somit darf man damit auch keine Beweise führen.

3.5 Quantoren

In diesem Abschnitt werden wir unsere Grundbausteine für Aussagen um zwei ganz wesentliche Komponenten ersetzen: die sogenannten Quantoren $\forall$ und $\exists$. Diese Quantoren haben die Bedeutung „für alle“ und „es existiert (mindestens) ein“. Wie man daraus Aussagen baut, lässt sich am einfachsten durch ein Beispiel erklären:

Beispiel 3.7. Wir betrachten die folgende Aussage A:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \colon 6 \mid n.$$

Diese Aussage liest sich Zeichen für Zeichen folgendermaßen:

„Für alle n aus $\mathbb{Z}$ gilt: n ist durch 6 teilbar.“

Wir sehen also den folgenden Aufbau: Nach dem $\forall$ kommt ein Name für eine Variable (hier n) und eine Beschreibung, was für Werte diese Variable annehmen darf (hier alle Elemente aus $\mathbb{Z}$). Es folgt ein Doppelpunkt, der in etwa so viel heißt wie „gilt:“ und anschließend folgt eine Aussage $C(n)$, die aber von unserer Variable n abhängt. Das gesamte Konstrukt sagt aus, dass $C(n)$ für alle n aus $\mathbb{Z}$ erfüllt ist.

Offensichtlich ist die obige Aussage A falsch. Wir können sie modifizieren, um zu folgender Aussage B zu gelangen:

$$\exists n \in \mathbb{Z}\colon 6 \mid n.$$

Diese Aussage bedeutet folgendes:

„Es existiert (mindestens) ein n in $\mathbb{Z}$, für das gilt: n ist durch 6 teilbar.“

Der Aufbau ist genauso wie mit $\forall$, nur die Bedeutung ist anders. Statt zu sagen, dass die Aussage $C(n)$ (also hier $6 \mid n$) für alle n aus $\mathbb{Z}$ gilt, behauptet B nur, dass es ein n aus $\mathbb{Z}$ gibt, welches $C(n)$ erfüllt. Das ist offensichtlich wahr, denn wir können zum Beispiel $n = 6$ wählen.

Damit kommen wir also zu folgender Definition:

Definition 3.8. Sei M eine Grundmenge und sei $C(m)$ eine Aussage, die von einem Element aus m abhängt. Dann definieren wir die folgenden neuen Aussagen:

$\forall m \in M\colon C(m) =$ „Für alle m aus M ist $C(m)$ erfüllt“,

$\exists m \in M\colon C(m) =$ „Es gibt (mindestens) ein m aus M, für das gilt: $C(m)$ ist erfüllt“.

Wir betrachten zwei weitere Beispiele:

Beispiel 3.9. a) Es sei A die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{Z}\colon 2 \mid n \wedge 3 \mid n \Rightarrow 6 \mid n.$$

Das ist die Aussage „Für alle ganzen Zahlen n gilt: Wenn n durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist n auch durch 6 teilbar.“

Wir sehen also: A ist die Teilbarkeitsregel durch 6.

b) Es sei P die Menge aller Plätzchen. Zu jedem Plätzchen p definieren wir die Aussage

$L(p) =$ „p ist lecker.“

Dann können wir zum Beispiel die folgenden beiden Aussagen betrachten:

1. $\forall p \in P\colon L(p)$,
2. $\exists p \in P\colon \neg L(p)$,
3. $\exists p \in P\colon \forall q \in P\colon L(p) \vee L(q)$.

Diese Aussagen bedeuten der Reihe nach:

1. „Alle Plätzchen sind lecker.“
2. „Es gibt ein Plätzchen, das nicht lecker ist.“
3. „Es gibt ein Plätzchen p, sodass für alle Plätzchen q gilt: p ist lecker oder q ist lecker.“

Zum Abschluss noch eine „Warnung“: Wenn man die Quantoren $\forall$ und $\exists$ kennt, ist es verlockend, künftig in allen Beweisen und Sätzen diese Quantoren zu benutzen. Tu das nicht! Die Verwendung von Quantoren in ganz normalen Beweisen (zum Beispiel der Matheolympiade) führt meistens dazu, dass die Texte schwerer zu verstehen sind (und das wird den Korrektor bei der Matheolympiade bestimmt nicht freuen). Wenn man sich in einer Vorlesung oder im Unterricht Notizen macht, kann die Kurzschreibweise mit $\forall$ und $\exists$ aber manchmal ganz praktisch sein.

3.6 Verneinung

Eine wichtige Fähigkeit ist Aussagen verneinen zu können. Damit ist gemeint, zu einer gegebenen Aussage A die Aussage $\neg A$ zu formulieren (natürlich auf „schöne“ Weise und nicht einfach als „A gilt nicht“). Es folgen ein paar Beispiele mit Standardmethoden der Verneinung:

Beispiel 3.10. a) Was ist die Verneinung von $A =$ „2 ist gerade und eine Primzahl“? Es ist $\neg A =$ „2 ist ungerade oder 2 ist keine Pr

Dahinter steckt die folgende Regel: Wenn wir die Teilaussagen $B =$ „2 ist gerade“ und $C =$ „2 ist eine Primzahl“ betrachten, dann ist $A = B \wedge C$ und $\neg A \equiv \neg B \vee \neg C$. Wir erhalten also:

$$\neg(B \wedge C) \equiv \neg B \vee \neg C.$$

Man kann zum Beispiel mit einer Wahrheitswertetabelle nachprüfen, dass die beiden Aussagenformeln links und rechts immer den gleichen Wahrheitswert haben. Es ist aber auch intuitiv klar, denn links steht „Es stimmt nicht, dass B und C richtig sind“ und rechts steht „B ist falsch oder C ist falsch“.

Es gilt auch die „umgekehrte“ Regel:

$$\neg(B \vee C) \equiv \neg B \wedge \neg C,$$

also „Es stimmt nicht, dass B oder C richtig ist“ ist gleichbedeutend mit „B und C sind beide falsch“.[14]

b) Was ist die Verneinung von $A =$ „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass“? Das ist ein bisschen schwieriger als das letzte Beispiel. Wenn man die Teilaussagen $B =$ „Es regnet“ und $C =$ „Die Straße ist nass“ definiert, dann hat A die Form $A = B \Rightarrow C$. In der Wahrheitswertetabelle 3.8 kann man nachlesen, dass A dann und nur dann falsch ist, wenn B wahr ist und C falsch. Klar, denn wenn es gerade regnet und die Straße nicht nass ist, dann kann A nicht richtig sein. In allen anderen Fällen aber schon!

Wir erhalten also $\neg A \equiv B \wedge \neg C$. Das führt zu der allgemeinen Formel

$$\neg(B \Rightarrow C) \equiv B \wedge \neg C.$$

c) In diesem Beispiel wollen wir untersuchen, wie man Aussagen verneint, die die Quantoren $\forall$ und $\exists$ enthalten. Wir betrachten dazu wieder die Menge P aller Plätzchen und die Aussage $L(p) =$ „p ist lecker“. Sei nun $A =$ „Alle Plätzchen sind lecker“.

Was ist die Verneinung von A? Nun, wenn es nicht stimmt, dass alle Plätzchen lecker sind, dann muss es wohl eins geben, das nicht lecker ist. Wir kommen also auf $\neg A =$ „Es gibt ein Plätzchen, das nicht lecker ist“. In Formeln geschrieben erhalten wir die Regel

$$\neg\big(\forall p \in P\colon L(p)\big) \equiv \exists p \in P\colon \neg L(p).$$

Es gilt auch die „umgekehrte“ Regel:

$$\neg\big(\exists p \in P\colon L(p)\big) \equiv \forall p \in P\colon \neg L(p),$$

das heißt „Es gibt kein Plätzchen, das lecker ist“ ist gleichbedeutend mit „Alle Plätzchen sind nicht lecker“.

Natürlich stimmen diese Regeln auch für andere Mengen P und für andere Aussagen $L(p)$.

Zum Abschluss nutzen wir die obigen Regeln, um eine etwas kompliziertere Aussage zu verneinen. Wir betrachten dazu die folgende Aussage A:

$$\forall n \in \mathbb{Z}\colon (n \geq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}\colon n = x^2 \wedge x \geq 0).$$

Man braucht ein bisschen Zeit, um zu verstehen, was die Aussage sagt. In Worten ist A gleich „Für alle ganzen Zahlen n gilt: Wenn n nicht negativ ist, dann gibt es eine ganze Zahl x, sodass $n = x^2$ und x nicht negativ ist“, oder ein bisschen kürzer formuliert: „Zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl n gibt es eine nichtnegative Wurzel x in $\mathbb{Z}$“. Diese Aussage ist falsch,[15] also verneinen wir sie:

$$\begin{aligned}
\neg A &= \neg\big(\forall n \in \mathbb{Z}\colon (n \geq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}\colon n = x^2 \wedge x \geq 0)\big)\\
&\equiv \exists n \in \mathbb{Z}\colon \neg\big(n \geq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}\colon n = x^2 \wedge x \geq 0\big)\\
&\equiv \exists n \in \mathbb{Z}\colon \big(n \geq 0 \wedge \neg(\exists x \in \mathbb{Z}\colon n = x^2 \wedge x \geq 0)\big)\\
&\equiv \exists n \in \mathbb{Z}\colon \big(n \geq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{Z}\colon \neg(n = x^2 \wedge x \geq 0)\big)\\
&\equiv \exists n \in \mathbb{Z}\colon (n \geq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{Z}\colon n \neq x^2 \vee x < 0)).
\end{aligned}$$

[14] Die beiden in diesem Beispiel vorgestellten Regeln nennt man auch de-Morgansche Regeln.

[15] Wenn man $\mathbb{Z}$ durch die sogenannten reellen Zahlen ersetzt, dann stimmt sie.

In Worten bedeutet das „Es gibt eine ganze Zahl n, die nicht negativ ist, sodass für jede ganze Zahl x gilt, dass $n \neq x^2$ oder $x < 0$“. Wenn man ein bisschen darüber nachdenkt, dann stellt man fest, dass das tatsächlich die Verneinung von obiger Aussage ist. Beachte, dass wir die Verneinung nur mithilfe obiger Regeln ermittelt haben, ohne zu wissen, worum es in der Aussage überhaupt geht.

Da die ursprüngliche Aussage falsch war, muss die Verneinung richtig sein. Und das ist tatsächlich so: Es existiert nämlich ein n, nämlich zum Beispiel $n = 2$, sodass es keine ganze Zahl x gibt mit $x^2 = n = 2$.

3.7 Folgerungen

Eines der wichtigsten Werkzeuge in der Logik ist die sogenannte Folgerung. Grob gesagt geht es darum, wann man eine bestimmte Aussage F aus anderen Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ folgern kann. Die gesamte Mathematik basiert auf dem Prinzip der Folgerung, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Wir haben leider nicht die nötigen Mittel, um ganz exakt zu definieren, was eine Folgerung ist, daher geben wir uns mit der folgenden etwas vagen Definition zufrieden:

Definition 3.11. Eine Aussage F ist eine Folgerung aus den Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, wenn man F durch reine Logik aus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ „ableiten“ kann.

Was damit gemeint sein soll, verdeutlichen wir an mehreren Beispielen:

Beispiel 3.12. a) Eine Folgerung ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned} A_1&: \quad \underline{\text{Alle}}\text{ Plätzchen }\underline{\text{sind}}\text{ lecker.}\\ A_2&: \quad \text{Ein Zimtstern }\underline{\text{ist ein}}\text{ Plätzchen.}\\ F&: \quad \text{Ein Zimtstern }\underline{\text{ist}}\text{ lecker.} \end{aligned}$$

Die unterstrichenen Wörter zeigen die logische Struktur der Aussagen. Die nicht unterstrichenen Objekte und Eigenschaften können beliebig ersetzt werden, ohne dass die Folgerung falsch wird. Unsere Folgerung hat also folgende Form:

$$\begin{aligned} A_1&: \quad \text{Alle } A \text{ sind } B.\\ A_2&: \quad c \text{ ist ein } A.\\ F&: \quad c \text{ ist } B. \end{aligned}$$

Wir können die Aussagen auch ganz formal hinschreiben: Wir bezeichnen mit A eine Grundmenge und mit $B(a)$ eine Aussage über das Objekt a aus A. Dann hat die Folgerung die Form

$$\begin{aligned} A_1&: \quad \forall a \in A\colon B(a).\\ A_2&: \quad c \in A.\\ F&: \quad B(c). \end{aligned}$$

Diese Folgerung ist korrekt, denn die Richtigkeit der Aussage F lässt sich aus der Richtigkeit der Aussagen A_1 und A_2 herleiten, ohne dass man weiß, was A, B und c sind. Das ist das, was in obiger Definition mit „logisch ableitbar“ gemeint ist.

Wir können also auch folgende Folgerung hinschreiben:

$$\begin{aligned} A_1&: \quad \underline{\text{Alle}}\text{ Elefanten }\underline{\text{sind}}\text{ rosa.}\\ A_2&: \quad \text{Fred }\underline{\text{ist ein}}\text{ Elefant.}\\ F&: \quad \text{Fred }\underline{\text{ist}}\text{ rosa.} \end{aligned}$$

Diese Folgerung hat genau die gleiche logische Struktur wie die Folgerung mit den Plätzchen und ist somit korrekt. Da in diesem Fall die Aussage A_1 nicht richtig ist, wissen wir leider nichts über den Wahrheitswert von F, denn aus falschen Aussagen kann man auch falsche Aussagen folgern.

b) Wir betrachten eine etwas längere Folgerung:

$$\begin{aligned} A_1&: \quad \underline{\text{Alle}}\text{ Tiere }\underline{\text{sind}}\text{ rosa.}\\ A_2&: \quad \underline{\text{Alle}}\text{ Schweine }\underline{\text{sind}}\text{ Tiere.}\\ A_3&: \quad \underline{\text{Es gibt ein}}\text{ Schwein.}\\ F&: \quad \underline{\text{Es gibt ein}}\text{ Tier, }\underline{\text{das}}\text{ rosa }\underline{\text{ist}}\text{.} \end{aligned}$$

Diese Folgerung ist ebenfalls korrekt, denn die dritte Aussage sagt, dass es ein Schwein s gibt, welches wegen der zweiten Aussage ein Tier und wegen der ersten Aussage rosa ist. Die untersrichenen Wörter zeigen wie in vorigem Beispiel den logischen Aufbau der Aussagen. Die Eigenschaften „Tier“, „rosa“ und „Schwein“ kann man durch beliebige andere Eigenschaften ersetzen und erhält immer noch eine korrekte Folgerung. Beachte, dass in diesem Fall die Aussage A_1 falsch ist.

Die Aussage A_3 ist wichtig, denn ohne A_3 wäre die Folgerung falsch. Obwohl wir durch A_1 wissen, dass alle Tiere rosa sind, können wir nicht folgern, dass es überhaupt ein Tier gibt. Das wird erst durch A_3 garantiert.

c) Der folgende Versuch einer Folgerung ist falsch:

A_1: Es gibt Vögel, die fliegen können.
A_2: Kein fliegendes Lebewesen kann Klavier spielen.
F: Kein Vogel kann Klavier spielen.

Die Folgerung ist falsch (obwohl alle drei Aussagen richtig sind), denn die gegebenen Aussagen schließen nicht aus, dass es Vögel gibt, die nicht fliegen können und über solche Vögel wissen wir überhaupt nicht, ob sie Klavier spielen können. Man kann die falsche Folgerung auch dadurch entlarven, dass man die in den Aussagen vorkommenden Bestandteile „Vogel“, „fliegen“ und „Klavier spielen“ durch andere Bestandteile ersetzt, sodass A_1 und A_2 wahr bleiben, aber F falsch wird. Zum Beispiel:

A_1: Es gibt Menschen, die stumm sind.
A_2: Kein stummes Lebewesen kann sprechen.
F: Kein Mensch kann sprechen.

Dieser Versuch einer Folgerung hat genau die gleiche logische Struktur wie obige Folgerung, aber das Ergebnis ist völlig falsch.

3.8 Beweise und Axiome

Mithilfe des in vorigem Abschnitt definierten Begriffs der „Folgerung“ können wir definieren, was wir unter einem Beweis verstehen: ein Beweis für eine Aussage A ist eine Folge von Folgerungen, wobei jede Folgerung nur aus bereits bewiesenen Aussagen folgert und am Ende die Aussage A gefolgert wird.

Man stößt mit dieser Definition aber sehr schnell auf ein Problem: Wenn man nur aus bereits bewiesenen Aussagen etwas folgern darf, dann kann man überhaupt nichts beweisen. Denn dafür bräuchte man erstmal eine bewiesene Aussage, doch eine solche kann man nicht finden, denn dafür bräuchte man ja eine andere bewiesene Aussage und so weiter.

Die Lösung des Problems besteht darin, dass man sich ganz zu Anfang (bevor man überhaupt beginnt mit dem Beweisen) eine Liste mit ein paar fundamentalen Aussagen aufschreibt, von denen man einfach annimmt, dass sie wahr sind. Alle Beweise dürfen dann neben den bereits bewiesenen Aussagen auch die fundamentalen Aussagen benutzen, um Neues zu folgern. Diese fundamentalen Aussagen nennt man Axiome:

Definition 3.13. Ein *Axiom* ist eine Aussage, die man ohne Beweis als wahr annimmt. Die Menge aller Axiome nennt man *Axiomensystem*.

Ein *Beweis* für eine Aussage A ist eine Folge von Folgerungen aus bereits bewiesenen Aussagen oder Axiomen, an deren Ende die Aussage A steht.

Beispiel 3.14. a) Man kann die gesamte Mathematik auf ein System von nur zehn Axiomen gründen, die sogenannten Zermelo-Fraenkel-Axiome. Sie beinhalten zum Beispiel „Es gibt eine Menge, die kein Element enthält“ und „Wenn man zwei Mengen A und B hat, dann gibt es auch eine Menge, die genau die Elemente enthält, die A und B enthalten“.

Diese Axiome klingen wie völlig offensichtliche Aussagen und man kann sich fragen, warum man so etwas überhaupt als wahr annehmen muss. Der Grund dafür ist, dass wir zwar eine sehr gute Intuition dafür haben, was eine Menge ist, aber die Mathematik das erstmal nicht „weiß“: rein logisch gesehen ist eine Menge irgendein Objekt M, sodass für jedes andere Objekt x definiert ist, ob $x \in M$ gilt oder nicht. Die Aussage, dass es die leere Menge gibt, heißt also: Es gibt ein Objekt M, sodass für alle Objekte x gilt: $x \notin M$.

Alle beweisbaren Aussagen in der Mathematik kann man rein logisch aus den zehn Zermelo-Fraenkel-Axiomen folgern!

b) Unabhängig von den Zermelo-Fraenkel-Axiomen kann man bestimmte Gebiete der Mathematik auf eigenen Axiomensystemen begründen. Die Geometrie kann man zum Beispiel mit nur fünf Axiomen beschreiben. Eines davon ist: „Zu zwei gegebenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die durch diese beiden Punkte geht.“

Obwohl es zwar interessant ist zu wissen, was Axiome sind, wird man in der Realität kaum mit ihnen in Berührung kommen. Kein Mathematiker macht sich die Mühe, alle seine Beweise ganz formal auf Axiome und bewiesene Aussagen zurückzuführen, und das wäre auch reine Zeitverschwendung. Wichtig ist nur, dass es theoretische möglich wäre, denn dadurch hat man ein Regelwerk für die gesamte Mathematik.

Zum Abschluss betrachten wir ein Beispiel für ein Axiomensystem bestehend aus vier Axiomen, mit welchem wir die Geschenkfabrik des Weihnachtsmanns beschreiben wollen:

Beispiel 3.15. Der Weihnachtsmann hat ganz erschrocken festgestellt, dass er viel zu wenige Sorten an Geschenken hat, um alle Kinder glücklich zu machen. Daher beauftragte er drei seiner begabtesten Wichtel, neue Sorten von Geschenken herzustellen. Die Wichtel bauten drei verschiedene Maschinen:

1. Der erste Wichtel baute den Add-o-Maten. Das ist eine Maschine, in die man mindestens zwei Geschenke tut, und die auf Knopfdruck ein neues Geschenk aus den gegebenen Geschenken herstellt. Sind x und y zwei Geschenke, dann bezeichnen wir mit $z = \boxed{x\ y}$ das Geschenk, das man durch den Add-o-Maten aus x und y erhält.

2. Der zweite Wichtel baute den Mul-o-Maten. Er funktioniert genauso wie der Add-o-Mat, produziert aber andere Geschenke. Wir bezeichnen mit $z = x\ y$ das Ergebnis des Mul-o-Maten, wenn man die Geschenke x und y hineintut.

3. Der dritte Wichtel baute den Neg-o-Maten. In ihn kann man nur ein einziges Geschenk tun, und der Neg-o-Mat spuckt dann ein neues Geschenk aus. Wir bezeichnen mit $y = x$ das Geschenk, das aus x entsteht.

Durch Herumexperimentieren stellten die drei Wichtel die folgenden bemerkenswerten Eigenschaften ihrer Automaten fest:

(1) Beim Add-o-Maten spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge man die Geschenke hineintut und ob man alle auf einmal verwandelt oder es schrittweise tut. Das heißt, für alle Geschenke x, y, z gilt:

$$\boxed{x\ y} = \boxed{y\ x} \qquad \text{und} \qquad \boxed{x\ \boxed{y\ z}} = \boxed{x\ y\ z} = \boxed{\boxed{x\ y}\ z}$$

(2) Es gibt eine Sorte Geschenk, die wir im Folgenden mit • bezeichnen wollen, die sich beim Add-o-Maten völlig neutral verhalten, das heißt, für alle Geschenke x gilt:

$$\boxed{x\ \bullet} = x$$

(3) Wenn man den Add-o-Maten und den Neg-o-Maten kombinieren will, dann gilt folgende Regel: Für alle Geschenke x ist

$$\boxed{x\ x} = \bullet$$

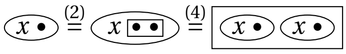
(4) Wenn man den Mul-o-Maten und den Add-o-Maten kombinieren will, erhält man die folgende merkwürde Regel: Für alle Geschenke x, y und z gilt:

$$x\ \boxed{y\ z} = \boxed{x\ y\quad x\ z}$$

Diese vier Eigenschaften sind nun unsere Axiome: Wir wissen, dass sie wahr sind, ohne es beweisen zu müssen. Mit diesen Axiomen können wir jetzt Dinge beweisen. Zum Beispiel:

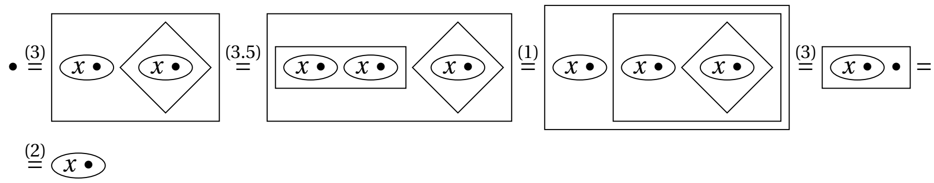
Satz 3.16. *Kombiniert man irgendein Geschenk mit • im Mul-o-Maten, dann erhält man das Geschenk • zurück.*

Beweis. Sei x ein beliebiges Geschenk. Dann gilt zunächst[16]:



(3.5)

Das können wir folgendermaßen benutzen:



Das ist genau das, was wir zeigen wollten. □

Man kann noch weitere Sätze beweisen. Zum Beispiel stimmt es, dass die doppelte Anwendung des Neg-o-Maten wieder das Ursprungsgeschenk liefert und dass der Neg-o-Mat ein $\bullet$-Geschenk unangetastet lässt, das heißt $\bullet = \bullet$.

Das obige Axiomensystem taucht tatsächlich in der Mathematik auf, nur dass man statt Geschenken die ganzen Zahlen nimmt. Wenn wir nämlich für den Add-o-Maten $x + y$ statt $\boxed{x\ y}$, für den Mul-o-Maten $x \cdot y$ statt $x\ y$ und für den Neg-o-Maten $-x$ statt x schreiben und für x und y ganze Zahlen statt Geschenken einsetzen, dann werden die vier Axiome zu ganz einfachen Rechenregeln für die ganzen Zahlen: (1) ist das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz für die Addition, (2) ist $x + 0 = x$ für alle ganzen Zahlen x (wir setzen dabei $0 = \bullet$), (3) ist $x + (-x) = 0$ für alle ganzen Zahlen x und (4) ist das Distributivgesetz.

Der Satz, den wir oben bewiesen haben, ist die Aussage, dass $x \cdot 0 = 0$ für alle ganzen Zahlen x gilt. Diese Rechenregel kann man also rein logisch aus den Axiomen (1) bis (4) folgern, *ohne überhaupt zu wissen, dass man über die ganzen Zahlen redet!* Die Regel gilt also für jedes System, das man sich überlegt und das die Eigenschaften (1) bis (4) hat: für die Weihnachtsgeschenke, für die ganzen Zahlen, und für viele weitere[17].

[16] Die Markierungen über den Gleichheitszeichen zeigen jeweils, welches Axiom wir verwendet haben.

[17] Als kleiner Ausblick: Ein System, das die Eigenschaften (1) bis (4) und und noch zwei bestimmte zusätzliche Eigenschaften erfüllt, werden wir später „Ring“ nennen.

4 Zahlenfolgen

Zahlenfolgen, also zum Beispiel $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$, tauchen an vielen Stellen in der Mathematik auf und bieten ein grundlegendes Beispiel für eine mathematische Kerndisziplin: die Mustererkennung. Zusammen mit dem Begriff der sogenannten Konvergenz dienen Zahlenfolgen zudem als Basis für die Analysis, ein Teilgebiet der Mathematik.

Wir werden uns verschiedene Zahlenfolgen ansehen und sie untersuchen. Eine ganz zentrale Frage wird dabei sein, auf welche Arten man eine gegebene Folge von Zahlen definieren kann, und wie man zwischen diesen Arten hin- und herwechselt.

4.1 Definition und Beispiele

Was eine Zahlenfolge ist, ist wahrscheinlich jedem klar. Wir definieren sie trotzdem präzise:

Definition 4.1. Eine *Zahlenfolge* (a_n) ordnet jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ (bzw. $n \geq 0$) eine Zahl[18] a_n zu (d.h. a_n ist die Zahl, die an der n-ten Stelle in der Folge steht). Häufig notiert man das auch als

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Das n-te Element der Folge (a_n), also die Zahl a_n, nennen wir auch n-tes *Folgenglied*.

Es folgen mehrere Beispiele:

Beispiel 4.2. a) Wir beginnen mit der sehr einfachen Folge

$$(a_n) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

Man erkennt sofort das Muster: diese Folge (a_n) ordnet jedem n die Zahl 1 zu, d.h. alle Folgenglieder sind 1. Mathematisch korrekt können wir das beschreiben durch

$$a_n = 1 \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Diese mathematische Regel definiert ganz eindeutig, wie unsere Folge (a_n) aussieht. Im Gegensatz dazu sagt uns die Vorschrift $(a_n) = 1, 1, 1, \ldots$ *nicht* genau, wie (a_n) definiert ist. Zum Beispiel könnte die Regel von (a_n) ja auch sein, dass erst einhundert Einsen und danach nur noch Zweien kommen.

b) Betrachten wir eine etwas kompliziertere Folge:

$$(b_n) = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Auch hier erkennt man sehr schnell ein Muster: die Folge besteht immer abwechselnd aus 1 und -1. Damit erhalten wir also folgende Regel:

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Alternativ kann man die Folge auch beschreiben, indem man sagt, dass jedes zweite mal $+2$ und jedes andere mal -2 gerechnet wird, um zum nächsten Folgenglied zu kommen. Das führt zu folgender Idee:

$$b_{n+1} = b_n + \begin{cases} 2, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -2, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Diese Regel sagt aus, dass man das $(n+1)$-te Folgenglied von (b_n) berechnet, indem man zum n-ten Folgenglied (also dem davor) entweder 2 oder -2 addiert, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

Aber Vorsicht! Die Regel beschreibt die Folge (b_n) nicht auf eindeutige Weise. Zum Beispiel erfüllt auch die folgende Folge $(\hat{b}_n)$ unsere Regel:

$$(\hat{b}_n) = 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots$$

[18] Mit „Zahl“ meinen wir meistens ganze Zahlen, wir wollen aber auch rationale Zahlen erlauben.

Das Problem mit der Regel ist, dass sie uns nicht verrät, womit die Folge anfängt. Um nämlich b_1 zu berechnen, müssten wir b_0 kennen, doch das gibt es gar nicht. Um die Regel vollständig zu machen, müssen wir also zusätzlich angeben, was b_1 ist. Das führt zu der folgenden vollständigen Regel:

$$b_{n+1} = b_n + \begin{cases} 2, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -2, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \text{für alle } n \geq 1,$$
$$b_1 = -1.$$

Nun ist die Folge (b_n) eindeutig definiert.

Es gibt sogar noch eine dritte Möglichkeit, (b_n) zu beschreiben, nämlich durch die Regel

$$b_n = (-1)^n \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

c) Als drittes Beispiel betrachten wir die Folge

$$(c_n) = 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots$$

Man erkennt ziemlich schnell, dass der Abstand zwischen zwei Folgengliedern immer 3 ist. Das heißt, die Folge (c_n) wird beschrieben durch die Regel, dass das $(n+1)$-te Folgenglied aus dem n-ten Folgenglied entsteht, indem man 3 dazu addiert. Formal aufgeschrieben ergibt das:

$$c_{n+1} = c_n + 3 \qquad \text{für alle } n \geq 1,$$
$$c_1 = 5.$$

Ganz wichtig ist auch hier (wie im vorigen Beispiel), dass man sagt, womit die Folge anfängt, das heißt, dass man c_1 definiert.

d) Nun betrachten wir

$$(d_n) = 9, 1, -7, -15, -23, \ldots$$

Diese Folge hat das gleiche Muster wie (c_n), nur mit -8 statt $+3$. Somit erhalten wir die Regel

$$d_{n+1} = d_n - 8 \qquad \text{für alle } n \geq 1,$$
$$d_1 = 9.$$

Die Folgen (c_n) und (d_n) haben die Eigenschaft, dass der Abstand von aufeinanderfolgenden Gliedern immer gleich ist. Eine solche Folge nennen wir *arithmetische Folge*. Neben (c_n) und (d_n) ist auch die Folge (a_n) (aus Beispiel a)) eine arithmetische Folge (der Abstand ist immer 0). Die Folge (b_n) ist jedoch nicht arithmetisch.

e) Sei (e_n) die Folge

$$(e_n) = 5, 15, 45, 135, 405, \ldots$$

Man findet schnell, dass der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern immer gleich 3 ist. Daraus erhält man die Regel, dass das $(n+1)$-te Glied von (e_n) gleich dem n-ten Glied mal 3 ist, also:

$$e_{n+1} = 3e_n \qquad \text{für alle } n \geq 1,$$
$$e_1 = 5.$$

Eine solche Folge, bei der also der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder immer das gleiche ist, nennen wir eine *geometrische Folge*. Neben (e_n) sind auch (a_n) und (b_n) geometrische Folgen: bei (a_n) ist der Quotient immer 1 und bei (b_n) ist er immer -1.

f) Wir betrachten die Folge

$$(f_n) = 3, 7, 13, 21, 31, 43, \ldots$$

Schreibt man unter je zwei Folgenglieder die Differenz und unter die entstehende Folge wieder die Differenzen und darunter wieder die Differenzen, so erhält man:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(f_n): & 3 & & 7 & & 13 & & 21 & & 31 & & 43 & & \cdots \\
(f'_n): & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & & \cdots & \\
(f''_n): & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\
(f'''_n): & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

Man erkennt leicht, dass die Folge in der zweiten Zeile (die wir mit (f'_n) bezeichnen) eine arithmetische Folge ist, da der Abstand immer gleich 2 ist. Es ist nicht schwer zu sehen, dass das n-te Glied dieser Folge gleich $2(n+1)$ ist. Damit erhalten wir die folgende Regel für (f_n):

$$\begin{aligned}
&f_{n+1} = f_n + 2(n+1) \qquad \text{für alle } n \geq 1,\\
&f_1 = 3.
\end{aligned}$$

Tatsächlich gibt es auch eine direkte Formel für (f_n), nämlich

$$f_n = n^2 + n + 1 \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Es gibt eine allgemeine Methode, wie man aus obigem Diagramm mit Differenzenfolgen eine Formel für die Folge (wie $n^2 + n + 1$) herleitet. Wir werden uns diese Methode später ansehen.

g) Sei

$$(g_n) = 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$$

Wenn man sich die Differenzenfolge (g'_n) anschaut, dann sieht man

$$(g'_n) = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Das ist eine geometrische Folge und sie hat die Formel $g'_n = 2^n$. Damit erhalten wir folgende Regel für (g_n):

$$\begin{aligned}
&g_{n+1} = g_n + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1,\\
&g_1 = 1.
\end{aligned}$$

Es gibt auch eine direkte Formel für (g_n), nämlich

$$g_n = 2^n - 1 \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

h) Wir betrachten die Folge

$$(F_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Das ist die sogenannte *Fibonacci-Folge*, die wir uns später nochmal genauer ansehen werden. Sie wird nach folgender Regel gebildet:

$$\begin{aligned}
&F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{für alle } n \geq 1,\\
&F_1 = 1,\\
&F_2 = 1.
\end{aligned}$$

Das heißt jedes Folgenglied ist die Summe der beiden vorherigen Glieder und sie startet mit $1, 1$. Wichtig ist, dass man F_1 *und* F_2 angeben muss, um die Folge eindeutig zu beschreiben. Lässt man nämlich zum Beispiel $F_2 = 1$ weg, so würde auch die folgende Folge unsere Regel erfüllen:

$$(\hat{F}_n) = 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, \ldots$$

Der Grund dafür ist, dass wir in der Regel *zwei* vorhergehende Folgenglieder benutzen, um das nächste Glied zu berechnen.

4.2 Rekursive und explizite Beschreibung

Wir hatten im letzten Abschnitt viele verschiedene Folgen kennengelernt und jede Folge eindeutig durch eine Regel beschrieben. Dabei gibt es zwei verschiedene Arten von Regeln, nämlich solche, die eine Formel für das n-te Folgenglied angeben und solche, die für die Berechnen des n-ten Folgenglieds die Werte der vorherigen Glieder benutzen. Diese beiden Arten von Beschreibungen werden explizit und rekursiv genannt.

Definition 4.3. Eine *explizite Beschreibung* einer Folge (a_n) ist eine Vorschrift, mit der man das n-te Glied a_n ausrechnen kann, ohne zu wissen, wie die vorherigen Glieder von (a_n) aussehen.

Eine *rekursive Beschreibung* einer Folge (a_n) ist eine Vorschrift, bei der man das n-te Glied a_n nur mit hilfe vorheriger Folgenglieder ausrechnen kann.

Beispiel 4.4. Explizite Beschreibungen sind zum Beispiel $f_n = n^2 + n + 1$ oder $e_n = 5 \cdot 3^{n-1}$.

Rekursive Beschreibungen sind dagegen $f_{n+1} = f_n + 2(n+1), f_1 = 3$ und $e_{n+1} = 3e_n, e_1 = 5$. Beachte, dass man bei rekursiven Beschreibungen immer auch die Anfangsglieder der Folge angeben muss.

In der Praxis ist es meistens einfacher, zu einer gegebenen Folge eine rekursive Beschreibung zu finden (Regeln wie „der Abstand ist immer gleich 3“ oder „jedes Glied ist die Summe seiner Vorgänger“ übersetzen sich direkt in rekursive Beschreibungen). Andererseits sind explizite Beschreibungen oftmals hilfreicher, um mit einer Folge zu arbeiten. Zum Beispiel lässt sich an einer expliziten Beschreibung leichter ablesen, wie die Folge sich für große n verhält. Man ist daher daran interessiert, aus einer rekursiven Beschreibung eine explizite Beschreibung abzuleiten. Wie das geht, werden wir in den nächsten Abschnitten behandeln.

Hier noch ein Beispiel zur Demonstration:

Beispiel 4.5. Die im vorigen Abschnitt vorgestellte Fibonacci-Folge (F_n) hat die rekursive Beschreibung

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \qquad \text{für alle } n \geq 1, \\ F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1. \end{aligned}$$

Es gibt aber auch eine explizite Beschreibung für (F_n), nämlich

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Dabei ist $\sqrt{5}$ eine Zahl, deren Quadrat gleich 5 ist[19].

4.3 Arithmetische und geometrische Folgen

In diesem Abschnitt werfen wir einen genaueren Blick auf die arithmetischen und geometrischen Folgen. Zur Erinnerung: eine Zahlenfolge heißt arithmetische Folge, wenn der Abstand (also die Differenz) zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Sie heißt geometrische Folge, wenn der Quotient konstant ist. Es interessiert uns vor allem, eine explizite Beschreibung für derartige Folgen zu finden.

Wir beginnen mit zwei Beispelen für arithmetische Folgen:

Beispiel 4.6. a) Wir betrachten die arithmetische Folge

$$(a_n) = 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$$

In dieser Folge ist der Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder immer gleich 3. Was ist die Formel für das n-te Glied a_n?

Wir benutzen den konstanten Abstand und sehen:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 = (a_{n-2} + 3) + 3 = (a_{n-3} + 3) + 3 + 3 = \cdots = a_1 + \underbrace{3 + 3 + 3 + \cdots + 3}_{\text{(n-1) mal}} = \\ &= a_1 + (n-1) \cdot 3 = 4 + (n-1) \cdot 3 = 4 + 3n - 3 = 1 + 3n. \end{aligned}$$

Eine explizite Beschreibung für (a_n) ist also

$$a_n = 1 + 3n \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Zum Beispiel ist $a_5 = 1 + 3 \cdot 5 = 16$, wie oben zu sehen.

[19] Dass eine solche Zahl existiert – und wie sie aussieht –, werden wir später im Kurs behandeln.

b) Sei

$$(b_n) = 25, 17, 9, 1, -7, -15, \dots$$

Ähnlich wie im vorigen Beispiel sehen wir

$$b_n = b_{n-1} - 8 = \cdots = b_1 - (n-1)8 = 25 - 8n + 8 = 33 - 8n.$$

Eine explizite Beschreibung für (b_n) ist also

$$b_n = 33 - 8n \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Die beiden Beispiel zeigen, dass wir zu jeder arithmetischen Folge eine explizite Beschreibung finden können, ähnlich wie in den Beispielen durchgeführt. Wir fassen diese Erkenntnis in folgendem Satz zusammen:

Satz 4.7. *Sei (a_n) eine arithmetische Folge und sei d der konstante Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder in (a_n). Dann hat (a_n) die folgende explizite Beschreibung:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = (a_1 - d) + n \cdot d \qquad \textit{für alle } n \geq 1.$$

Wenn wir in der Folge aus dem Satz zusätzlich $a_0 = a_1 - d$ definieren, dann vereinfacht sich die Formel zu

$$a_n = a_0 + n \cdot d \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Es ist also bei der Betrachtung arithmetischer Folgen sinnvoll, die Folge bei $n = 0$ starten zu lassen.

Kommen wir nun zu geometrischen Folgen:

Beispiel 4.8. Wir betrachten die geometrische Folge

$$(a_n) = 6, 12, 24, 48, 94, \dots$$

Der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern ist immer 2. Das können wir benutzen, um eine Formel für a_n zu finden:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 = (a_{n-2} \cdot 2) \cdot 2 = \cdots = a_1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{(n-1)\text{ mal}} = 6 \cdot 2^{n-1}.$$

Wir erhalten also die explizite Beschreibung

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1} \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Ähnlich wie bei den arithmetischen Folgen können wir also auch bei geometrischen Folgen immer eine explizite Beschreibung finden. Das führt zu folgendem Satz:

Satz 4.9. *Sei (a_n) eine geometrische Folge, wobei q der konstante Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder in (a_n) ist. Dann hat (a_n) die folgende explizite Beschreibung:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \textit{für alle } n \geq 1.$$

4.4 Die Gaußsche Summenformel und Differenzenfolgen

In den folgenden Abschnitten wenden wir uns weiteren Folgen zu und versuchen jeweils explizite Beschreibungen zu finden. Dabei interessieren uns Folgen wie in Beispiel 4.2.f, deren Differenzenfolgen irgendwann konstant 0 werden. Die dafür notwendigen Grundlagen erarbeiten wir uns in diesem und dem nächsten Abschnitt.

Eine sehr wichtige Formel ist die sogenannte Gaußsche Summenformel. Der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß soll sie bereits als Schüler gefunden haben, als sein Mathematiklehrer der Klasse die folgende Aufgabe zur Beschäftigung gab: „Was ist die Summe der Zahlen von 1 bis 1000?“ Der Lehrer muss ziemlich überrascht gewesen sein, als der junge Gauß sich nach kurzer Zeit meldete und die richtige Antwort sagte: „Das Ergebnis ist 500500.“

Er benutzte folgenden Trick: Um die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + 999 + 1000$ zu berechnen, können wir die Zahlen zu Paaren zusammenfassen, deren Summe jeweils 1001 ist, nämlich $1 + 1000, 2 + 999, 3 + 998, 4 + 997$ und so weiter. Es gibt 500 solche Paare, das heißt die gesamte Summe ist gleich 500 mal 1001, das Ergebnis ist also $500 \cdot 1001 = 500500$.

Diese Methode lässt sich natürlich verallgemeinern:

Satz 4.10. *Für die Summe $1+2+\cdots+n$ der ersten n natürlichen Zahlen (wobei n eine natürliche Zahl größer oder gleich 1 ist) gilt:*

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir fassen die Summanden zu Paaren zusammen, deren Summe jeweils gleich $n+1$ ist, nämlich $1+n, 2+(n-1), 3+(n-2)$ und so weiter. Wenn n gerade ist, dann gibt es genau $\frac{n}{2}$ solcher Paare, das heißt die Summe ist gleich $\frac{n}{2}\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}$. Wenn n ungerade ist, dann gibt es $\frac{n-1}{2}$ solche Paare und zusätzlich die Zahl in der Mitte, nämlich $\frac{n+1}{2}$. Die Summe ist also gleich $\frac{n-1}{2}(n+1)+\frac{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$, wie zu zeigen war. □

Diese Summenformel hat eine Anwendung für Zahlenfolgen. Zunächst einmal kann man natürlich die Folge (D_n) mit

$$D_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

betrachten. Das ist die Folge

$$(D_n)=1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,\ldots$$

Diese Folge taucht auf natürliche Weise auf, wenn wir versuchen, aus Differenzenfolgen eine explizite Beschreibung einer Folge abzuleiten.

Definition 4.11. Sei (a_n) eine Zahlenfolge, die bei $n=0$ startet. Dann ist die *Differenzenfolge* von (a_n) die Folge (a'_n), definiert durch

$$a'_n=a_{n+1}-a_n \qquad \text{für alle } n\geq 0.$$

Beispiel 4.12. Für die oben definierte Folge (D_n) erhalten wir folgende Differenzenfolgen:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(D_n): & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & & \cdots \\
(D'_n): & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & \cdots & \\
(D''_n): & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & \\
(D'''_n): & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

Uns interessiert im Folgenden, wie wir eine explizite Beschreibung für (a_n) finden können, wenn die Differenzenfolgen von (a_n) irgendwann konstant 0 werden (bei (D_n) ist dies bei der dritten Differenzenfolge der Fall, wie voriges Beispiel zeigt). Bevor wir uns einer allgemeinen Lösung zuwenden, betrachten wir zunächst ein paar Beispiele:

Beispiel 4.13. a) Was ist, wenn die erste Differenzenfolge von (a_n) konstant 0 ist? Dann ist der Abstand zweier Glieder von (a_n) immer 0, das heißt (a_n) ist konstant. Zum Beispiel:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a_n): & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \cdots \\
(a'_n): & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots &
\end{array}$$

Insbesondere haben wir eine explizite Beschreibung für (a_n), nämlich $a_n=c$, wobei c die konstante Zahl ist.

b) Was ist, wenn die zweite Differenzenfolge von (a_n) konstant 0 ist? Dann ist die erste Differenzenfolge von (a'_n) konstant 0, das heißt (a'_n) ist konstant, nach vorigem Beispiel. Das bedeutet aber, dass der Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder von (a_n) konstant, also immer gleich ist. Zum Beispiel:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a_n): & 1 & & 4 & & 7 & & 10 & & 13 & & 16 & & 19 & & \cdots \\
(a'_n): & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \cdots & \\
(a''_n): & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & &
\end{array}$$

Somit ist (a_n) eine arithmetische Folge und wir können eine explizite Beschreibung von (a_n) finden, wie in vorigem Abschnitt gezeigt.

c) Was ist, wenn die dritte Differenzenfolge von (a_n) konstant 0 ist? Dann ist die zweite Differenzenfolge von (a'_n) konstant, das heißt (a'_n) ist eine arithmetische Folge. Dieser Fall ist schon deutlich schwieriger als der vorige, aber wir können die Gaußsche Summenformel benutzen, um eine Formel für (a_n) zu finden. Nehmen wir zum Beispiel an, dass $a'_n = 3n$ für alle $n \geq 0$ und dass $a_0 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + a'_0 = 0 + 0 = \underline{0} \cdot 3, \\
a_2 &= a_1 + a'_1 = 0 + 1 \cdot 3 = \underline{1} \cdot 3, \\
a_3 &= a_2 + a'_2 = 3 + 2 \cdot 3 = \underline{3} \cdot 3, \\
a_4 &= a_3 + a'_3 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = \underline{6} \cdot 3, \\
a_5 &= a_4 + a'_4 = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = \underline{10} \cdot 3.
\end{aligned}$$

Die unterstrichenen Zahlen sind uns schon einmal begegnet. Das ist die Folge (D_n). Für diese Folge kennen wir schon eine Formel, nämlich $D_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Diese Formel können wir benutzen, um eine Formel für (a_n) aufzuschreiben:

$$a_n = D_{n-1} \cdot 3 = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \cdot 3 = \frac{3n(n-1)}{2} \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Zur Veranschaulichung:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a_n): & 0 & & 0 & & 3 & & 9 & & 18 & & 30 & & 45 & & \cdots \\
(a'_n): & & 0 & & 3 & & 6 & & 9 & & 12 & & 15 & & \cdots & \\
(a''_n): & & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \cdots & & \\
(a'''_n): & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

4.5 Das Pascalsche Dreieck

Im vorigen Abschnitt haben wir es geschafft, eine explizite Beschreibung für eine Folge zu finden, wenn deren dritte Differenzenfolge konstant 0 ist. Unsere Kenntnisse reichen jedoch noch nicht aus, um auch explizite Beschreibungen zu finden, wenn erst die vierte oder fünfte Differenzenfolge 0 wird. Um das zu schaffen, brauchen wir ein weiteres Hilfsmittel: das Pascalsche Dreieck. Dieses ist in Abbildung 4.2 zu sehen.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
\iddots&&&&&&&&\vdots&&&&&&&&\ddots
\end{array}$$

Abbildung 4.2: Das Pascalsche Dreieck.

Man konstruiert das Dreieck, indem man je zwei nebeneinanderstehende Zahlen addiert und das Ergebnis in die Mitte unter den beiden Zahlen schreibt (am Rand stehen immer Einsen). Die in dem Dreieck auftauchenden Zahlen sind sehr wichtig, deshalb geben wir ihnen einen eigenen Namen:

Definition 4.14. Die Zahlen im Pascalschen Dreieck heißen *Binomialkoeffizienten*. Die k-te Zahl in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (dabei zählen wir n und k beginnend bei 0) bezeichnen wir mit $\binom{n}{k}$, gesprochen „n über k“.

Beispiel 4.15. a) Man kann direkt ablesen, dass $\binom{2}{1} = 2$ (denn an Stelle 1 in Zeile 2 steht eine 2), $\binom{5}{3} = 10$ (denn an Stelle 3 in Zeile 5 steht eine 10), $\binom{3}{0} = 1$ (denn an Stelle 0 in Zeile 3 steht eine 1) und $\binom{7}{2} = 21$.

b) Für alle $n \geq 0$ ist $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$. Denn $\binom{n}{0}$ ist die Zahl ganz links und $\binom{n}{n}$ ist die Zahl ganz rechts in der Zeile n und da steht immer eine 1.

c) Für alle $n \geq 1$ ist $\binom{n}{1} = n$, denn $\binom{n}{1}$ ist die Zahl an der Stelle 1 in der Zeile n (also die zweite Zahl in dieser Zeile) und man sieht an dem Dreieck, dass dort immer n steht.

d) Die Folge der Zahlen $\binom{n}{2}$ ist $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ Diese Folge ist uns bereits bei der Gaußschen Summenformel begegnet! Wir erhalten dadurch die Formel $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

e) Es gibt eine allgemeine Formel, mit der man $\binom{n}{k}$ berechnen kann. Zum Beispiel gilt für alle $n \geq 0$:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Man erkennt recht schnell ein Muster, wenn man die Formeln für $\binom{n}{1}$ und $\binom{n}{2}$ folgendermaßen aufschreibt:

$$\binom{n}{1} = n = \frac{n}{1},$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}.$$

Tatsächlich stimmt es, dass man $\binom{n}{k}$ berechnet, indem man n mit den k Zahlen davor multipliziert und durch $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k!$ teilt.[20]

4.6 Eine explizite Formel mittels Binomialkoeffizienten

Wir haben nun alle Hilfsmittel parat, um eine explizite Formel für eine Folge zu finden, deren Differenzenfolgen irgendwann konstant 0 werden. Wir betrachten dazu ein Beispiel:

Beispiel 4.16. Es sei (a_n) die folgende Zahlenfolge:

$$(a_n) = -1, -1, 1, 11, 35, 79, 149, 251, \ldots$$

Wie ist diese Folge fortzusetzen?

Es ist quasi unmöglich, durch geschicktes „Draufschauen“ eine Regel für diese Folge zu finden. Daher sehen wir uns deren Differenzenfolgen an:

$$\begin{array}{rccccccccccccccccc}
(a_n): & -1 & & -1 & & 1 & & 11 & & 35 & & 79 & & 149 & & 251 & & \cdots \\
(a'_n): & & 0 & & 2 & & 10 & & 24 & & 44 & & 70 & & 102 & & \cdots \\
(a''_n): & & & 2 & & 8 & & 14 & & 20 & & 26 & & 32 & & \cdots \\
(a'''_n): & & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \cdots \\
(a''''_n): & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots
\end{array}$$

Wir sehen, dass die vierte Differenzenfolge, also (a''''_n) konstant 0 ist. Um daraus eine Formel für (a_n) abzuleiten, betrachten wir die erste Zahl in der Folge und in den Differenzenfolgen, also die Zahlen $-1, 0, 2, 6$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass unsere Ausgangsfolge (a_n) so gewählt war, dass die ersten Zahlen in den Differenzenfolgen und der Folge selbst $0, 0, 0, 6$ statt $-1, 0, 2, 6$ sind. Aus dieser Information (und der Tatsache, dass die vierte Differenzenfolge konstant 0 ist) können wir schrittweise rekonstruieren, wie unsere neue Ausgangsfolge (b_n) dann aussehen würde:

$$\begin{array}{rccccccccccccccccc}
(b_n): & 0 & & 0 & & 0 & & 6 & & 24 & & 60 & & 120 & & 210 & & \cdots \\
(b'_n): & & 0 & & 0 & & 6 & & 18 & & 36 & & 60 & & 90 & & \cdots \\
(b''_n): & & & 0 & & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \cdots \\
(b'''_n): & & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \cdots \\
(b''''_n): & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots
\end{array}$$

Auffällig ist, dass alle Zahlen durch 6 teilbar sind. Wir teilen also durch 6 und nennen diese neue Folge (c_n). Dann erhalten wir:

[20] Wir werden uns später (beim Thema Kombinatorik) damit beschäftigen, woher diese Formel kommt.

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccccc}
(c_n): & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & & 10 & & 20 & & 35 & & \cdots \\
(c'_n): & & 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & \cdots & \\
(c''_n): & & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \cdots & & \\
(c'''_n): & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & & \\
(c''''_n): & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

Das markierte Dreieck ist genau das Pascalsche Dreieck (um 90° gedreht), wie in Abbildung 4.2 zu sehen! Das ist auch nicht überraschend, denn wenn man genauer darüber nachdenkt, dann merkt man, dass die Zahlen in den Differenzenfolgen genauso gebildet werden wie im Pascalschen Dreieck: jede Zahl ist die Summe der Zahlen links und schräg links unten.

Diese Feststellung führt automatisch zu einer Formel für (c_n), nämlich $c_n = \binom{n}{3}$ für alle $n \geq 0$ (dabei setzen wir $\binom{n}{3} := 0$, wenn $n < 3$), denn die Glieder in (c_n) bilden gerade das dritte Element in jeder Zeile des Pascalschen Dreiecks und $\binom{n}{3}$ ist per Definition das dritte Element in der Zeile n.

Daraus erhalten wir auch sofort die Formel $b_n = 6 \cdot c_n = 6 \cdot \binom{n}{3}$ für alle $n \geq 0$. Wir sind der gesuchten Formel für (a_n) also einen großen Schritt näher gekommen!

Wir wenden die gleiche Methode wie oben erneut an, doch diesmal betrachten wir den Fall, dass die Anfangsglieder der Differenzenfolgen die Zahlen $0, 0, 2, 0$ sind. Wir nennen (d_n) die dadurch erzeugte Ausgangsfolge und erhalten:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccccc}
(d_n): & 0 & & 0 & & 2 & & 6 & & 12 & & 20 & & 30 & & 42 & & \cdots \\
(d'_n): & & 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & & \cdots & \\
(d''_n): & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\
(d'''_n): & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \\
(d''''_n): & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

Analog wie bei der Folge (b_n) erhalten wir ein Pascalsches Dreieck, nur dass alle Zahlen mit einer Konstante (in diesem Fall 2) multipliziert sind. Genauso wie bei (b_n) erhalten wir dadurch eine Formel, nämlich $d_n = 2 \cdot \binom{n}{2}$ für alle $n \geq 0$.

Was ist nun, wenn die Anfangsglieder der Differenzenfolgen $0, 0, 2, 6$ sind, wenn wir also die obigen Beispiele kombinieren? Die so entstehende Folge (e_n) hat folgende Darstellung:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccccc}
(e_n): & 0 & & 0 & & 2 & & 12 & & 36 & & 80 & & 150 & & 252 & & \cdots \\
(e'_n): & & 0 & & 2 & & 6 & & 12 & & 20 & & 30 & & 42 & & \cdots & \\
(e''_n): & & & 2 & & 8 & & 14 & & 20 & & 26 & & 32 & & \cdots & & \\
(e'''_n): & & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \cdots & & & \\
(e''''_n): & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

Bei genauerem Hinsehen erkennt man, dass die Folge (e_n) einfach nur die Summe aus (b_n) und (d_n) ist:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(e_n): & (0+0) & & (0+0) & & (0+2) & & (6+6) & & (24+12) & & (60+20) & & (120+30) & & (210+42) \\
(e'_n): & & (0+0) & & (0+2) & & (2+4) & & (6+6) & & (12+8) & & (20+10) & & (30+12) & \\
(e''_n): & & & (2+0) & & (2+6) & & (2+12) & & (2+18) & & (2+24) & & (2+30) & & \\
(e'''_n): & & & & (0+6) & & (0+6) & & (0+6) & & (0+6) & & (0+6) & & & \\
(e''''_n): & & & & & (0+0) & & (0+0) & & (0+0) & & (0+0) & & & &
\end{array}
$$

Damit erhalten wir also die Formel

$$
e_n = d_n + b_n = 2 \cdot \binom{n}{2} + 6 \cdot \binom{n}{3} \qquad \text{für alle } n \geq 0.
$$

Um aus (e_n) eine Formel für (a_n) zu gewinnen, müssen wir nur noch dafür sorgen, dass die Folge mit -1 statt 0 beginnt. Wir addieren also noch -1 zu e_n, oder, um es besser auszudrücken, wir addieren $(-1) \cdot \binom{n}{0}$, denn $\binom{n}{0} = 1$ für alle n. Damit erhalten wir:

$$
a_n = (-1) \cdot \binom{n}{0} + e_n = (-1) \cdot \binom{n}{0} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 6 \cdot \binom{n}{3} \qquad \text{für alle } n \geq 0.
$$

Tatsächlich prüft man leicht nach, dass diese Formel für alle gegebenen Glieder von (a_n) stimmt. Mit der Formel wissen wir aber auch, wie (a_n) weitergeht! Zum Beispiel können wir das nächste Glied, also a_8, berechnen:

$$a_8 = (-1) \cdot \binom{8}{0} + 2 \cdot \binom{8}{2} + 6 \cdot \binom{8}{3} = -1 + 2 \cdot 28 + 6 \cdot 56 = 391.$$

Anstatt die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck einzusetzen, können wir auch die im vorigen Abschnitt vorgestellten Formeln für die Binomialkoeffizienten benutzen. Nach ein wenig Umformen erhalten wir daraus die etwas einfachere Formel

$$a_n = n^3 - 2n^2 + n - 1 \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Wir können die folgende Regel ableiten:

Satz 4.17. *Sei (a_n) eine Folge derart, dass die k-te Differenzenfolge von (a_n) konstant 0 ist. Seien ferner $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ die Anfangsglieder der Differenzenfolgen (das heißt $b_0 = a_0$, $b_1 = a'_0$ und so weiter). Dann gilt:*

$$a_n = b_0 \cdot \binom{n}{0} + b_1 \cdot \binom{n}{1} + b_2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + b_{k-1} \cdot \binom{n}{k-1} \qquad \textit{für alle } n \geq 0.$$

Zum besseren Verständnis dieser Regel und um ihre Mächtigkeit zu zeigen, schauen wir uns abschließend ein paar weitere Beispiele an:

Beispiel 4.18. a) Wir betrachten die Folge

$$(a_n) = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \ldots$$

Die Differenzenfolgen sind:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a_n): & \underline{4} & & 7 & & 10 & & 13 & & 16 & & 19 & & 22 & & \cdots \\
(a'_n): & & \underline{3} & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \cdots & \\
(a''_n): & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & &
\end{array}$$

Die unterstrichenen Zahlen können wir verwenden, um eine Formel für a_n aufzuschreiben:

$$a_n = \underline{4} \cdot \binom{n}{0} + \underline{3} \cdot \binom{n}{1} = 4 + 3n \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

b) Wir können mit unserer Regel sogar die Gaußsche Summenformel beweisen. Sei dazu D_n die Summe der ersten n Zahlen (wie oben). Um nun eine Formel für D_n zu finden, schreiben wir die Differenzenfolgen auf:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(D_n): & \underline{0} & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & \cdots \\
(D'_n): & & \underline{1} & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \cdots & \\
(D''_n): & & & \underline{1} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & \\
(D'''_n): & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

Daraus erhalten wir sofort:

$$D_n = \underline{0} \cdot \binom{n}{0} + \underline{1} \cdot \binom{n}{1} + \underline{1} \cdot \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Auf die gleiche Weise können wir Formeln für die Summe der ersten n Quadratzahlen oder die Summe der ersten n Kubikzahlen finden!

4.7 Konvergenz

Zum Abschluss des Themas „Zahlenfolgen“ schauen wir uns einen weiteren sehr wichtigen Begriff an: die sogenannte „Konvergenz“. Grob gesagt interessiert man sich dafür, wie sich eine Zahlenfolge verhält, wenn man n immer größer werden lässt, das heißt wie die Zahlenfolge „im Unendlichen“ aussieht. Besonders interessant ist dabei der Fall, dass die Folge sich einer bestimmten Zahl beliebig nah annähert. Daher die folgende Definition:

Definition 4.19. Eine Zahlenfolge (a_n) *konvergiert* gegen eine Zahl a, wenn für genügend große n alle Glieder a_n beliebig nach an a sind.

Zur Verdeutlichung betrachten wir ein paar grundlegende Beispiele:

Beispiel 4.20. a) Die Folge $1, 1, 1, \ldots$ konvergiert gegen die Zahl 1, denn *alle* Glieder dieser Folge sind gleich 1 und damit beliebig nah an 1.

b) Die Folge $1, -1, 1, -1, \ldots$ konvergiert nicht. Denn egal wie groß man n wählt, die Glieder dieser Folge springen immer um 2 hin und her und nähern sich somit keiner bestimmten Zahl an. Trotzdem sind die Zahlen 1 und -1 für diese Folge besonders, da unendlich viele Folgenglieder beliebig nah an diesen beiden Zahlen liegen. Man sagt daher, dass 1 und -1 *Häufungspunkte* der Folge sind.

c) Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ konvergiert gegen die Zahl 0, denn für sehr große n ist $\frac{1}{n}$ beliebig nah an der 0.

Warum ist der Konvergenzbegriff so wichtig? Um das zu verstehen ist weitaus mehr Hintergrundwissen notwendig (die gesamte sogenannte Analysis beruht auf der Konvergenz von Folgen), aber wir können uns eine einfache Anwendung ansehen: die Erzeugung von neuen Zahlen.

Wir möchten im Folgenden eine Zahl finden, deren Quadrat gleich 5 ist. Eine solche Zahl nennen wir die *Wurzel* aus 5 und schreiben auch $\sqrt{5}$ dafür. Man kann zeigen, dass es keine Zahl in $\mathbb{Q}$ (also keine Bruchzahl) gibt, deren Quadrat 5 ist, das heißt unsere Zahl $\sqrt{5}$ existiert eigentlich gar nicht – in den uns bekannten Zahlen. Wir können aber eine Folge konstruieren, die sich der gesuchten Zahl $\sqrt{5}$ beliebig nah annähert:

- Es gilt $2^2 < 5 < 3^2$, also muss $\sqrt{5}$ zwischen 2 und 3 liegen, hat also die Form $2, \ldots$.
- Es gilt $2{,}2^2 < 5 < 2{,}3$, also muss $\sqrt{5}$ zwischen 2,2 und 2,3 liegen, das heißt $\sqrt{5} = 2{,}2\ldots$.
- So fortsetzend sehen wir, dass die gesuchte Zahl die Form $2{,}236067977\ldots$ haben muss.

Wir definieren nun die Folge (a_n) durch $a_1 = 2$, $a_2 = 2{,}2$, $a_3 = 2{,}23$ und so weiter. Man sieht sofort, dass die Glieder von (a_n) mit wachsendem n immer näher zusammenrücken, sich also immer weniger ändern. Die Folge (a_n) müsste also eigentlich konvergieren. Und tatsächlich kann man einfach so tun als würde (a_n) konvergieren. Der Grenzwert ist dann unsere gesuchte Zahl!

Führt man dieses Verfahren mit allen Zahlenfolgen durch, die eigentlich konvergieren sollten, dann erhält man eine große Menge neuer Zahlen. Diese Zahlen werden *reelle Zahlen* genannt und die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Die reellen Zahlen werden uns später immer wieder begegnen.

5 Geometrie

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Geometrie, wie sie in der Olympiade-Mathematik angewendet wird. Wir wiederholen zunächst ein paar sehr wichtige Sätze über Dreiecke und widmen uns anschließend Kreisen und Vierecken. Abschließend gibt es einen kleinen Ausblick darauf, welche Rolle Geometrie in der Mathematik spielt und welche Arten von Geometrien es gibt.

5.1 Elementare Sätze über Winkel und Dreiecke

Geraden und Dreiecke gehören zu den einfachsten geometrischen Figuren. Sie zu verstehen ist der erste wichtige Schritt, um ein erfolgreicher Geometer zu werden. Ein paar sehr fundamentale Aussagen fassen die folgenden Sätze zusammen.

Satz 5.1. *Es gelten die folgenden drei Aussagen:*

(a) Schneiden sich zwei Geraden, so gilt für die dabei entstehenden Winkel: Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß (Scheitelwinkel) und aneinanderliegende Winkel ergänzen sich zu $180°$ *(Nebenwinkel). Das heißt in der Abbildung 5.3 gilt* $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ *und* $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

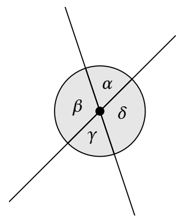


Abbildung 5.3: Schnittwinkel an einer Geraden.

(b) Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ist immer gleich $180°$ *(Innenwinkelsummensatz).*

(c) In einem Dreieck liegt die längste Seite stets dem größten Innenwinkel gegenüber.

Satz 5.2. *Zwei Dreiecke sind kongruent*[21]*, wenn sie in einer der folgenden Wertemengen übereinstimmen:*

(sss) Alle drei Seiten.

(wsw) Eine Seite a *und die beiden angrenzenden Winkel* β *und* γ.

(sws) Ein Winkel α *und die beiden angrenzenden Seiten* b *und* c.

(Ssw) Zwei Seiten a *und* b *(mit* a *länger als* b*) und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel* α.

In den folgenden Abschnitten werden wir sehr häufig gleichschenkligen Dreiecken begegnen, also Dreiecken mit zwei gleichlangen Seiten. Dafür ist der folgende Satz sehr nützlich:

Satz 5.3 (Basiswinkelsatz)**.** *Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn es zwei gleichgroße Innenwinkel hat. In diesem Fall liegen die gleichlangen Seiten den gleichgroßen Winkeln gegenüber.*

Beweis. Wir haben zwei Aussagen zu beweisen:

a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann hat es zwei gleichgroße Innenwinkel, und zwar die den gleichlangen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

b) Wenn ein Dreieck zwei gleichgroße Winkel hat, dann ist es gleichschenklig und die gleichlangen Seiten sind die den gleichgroßen Winkeln gegenüberliegnden Seiten.

Wir beweisen nur den Teil a), der Teil b) geht sehr ähnlich.

Sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der üblichen Bezeichnung für Seiten und Winkel[22] und seien a und b die gleichlangen Seiten (siehe Abbildung 5.4).

[21]Zwei Figuren heißen *kongruent* zueinander, wenn sie durch Drehen, Schieben und Spiegeln aufeinander abgebildet werden können. Zwei kongruente Dreiecke stimmen zum Beispiel in allen drei Seitenlängen und in allen drei Innenwinkelgrößen überein.

[22]Das heißt a ist die Seite, die dem Punkt A gegenüberliegt und α ist der Innenwinkel bei A. Analog für b, c, β, γ.

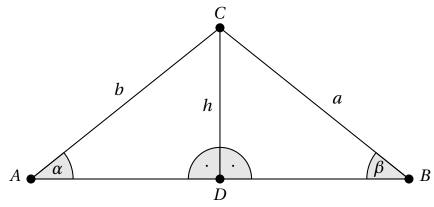


Abbildung 5.4: Darstellung zum Beweis von Satz 5.3.

Wir zeichnen die Höhe h von C auf die Seite c ein und nennen den Höhenfußpunkt D. Dann stimmen die beiden Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle CDB$ in dem Winkel[23] $\angle CDA = \angle BDC = 90°$ und in den Seiten h (für beide Dreiecke) und $a = b$ überein. Da a bzw. b nach Satz 5.1c die längste Seite in $\triangle ADC$ bzw. $\triangle CDB$ ist (denn ein 90°-Winkel ist nach dem Innenwinkelsummensatz immer der größte Innenwinkel in einem Dreieck), können wir den Kongruenzsatz Ssw anwenden und erhalten, dass die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle CDB$ kongruent sind. Folglich sind auch ihre Innenwinkel gleich, das heißt $\alpha = \beta$, wie zu zeigen war. □

Geometrie lernt man am besten durch das Lösen von Aufgaben. Es folgen also zwei Beispielaufgaben aus der Mathematik-Olympiade:

Aufgabe 5.4 (aus MO 500724)**.** Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ (mit den üblichen Bezeichnungen für Seiten und Winkel) mit rechtem Winkel $\gamma = 90°$ und mit dem Innenwinkel $\alpha = 60°$. Sei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit der Seite a und sei E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ADB$ mit der Seite c. Ferner sei $\overline{AB}$ doppelt so lang wie $\overline{AC}$.

a) Beweise, dass das Dreieck $\triangle ABD$ gleichschenklig ist.

b) Beweise, dass das Dreieck $\triangle AEC$ gleichseitig ist.

Lösung. Abbildung 5.5 zeigt eine Zeichnung zu der Aufgabe.

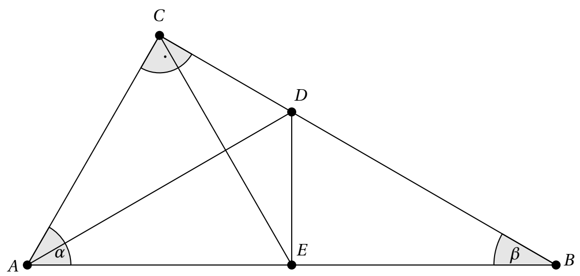


Abbildung 5.5: Zeichnung zu Aufgabe 5.4.

a) Nach Satz 5.3 genügt es zu zeigen, dass das Dreieck $\triangle ABD$ zwei gleichgroße Innenwinkel hat. Wir zeigen daher im folgenden, dass $\angle BAD = \angle DBA$, indem wir diese beiden Winkel ausrechnen.

   Wir wissen, dass $\alpha = 60°$ und dass AD eine Winkelhalbierende von α ist. Folglich ist $\angle BAD = \frac{\alpha}{2} = 30°$.

   Mit dem Innenwinkelsummensatz in $\triangle ABC$ erhalten wir $\angle DBA = \beta = 180° - 90° - \alpha = 30°$.

   Da beiden berechneten Winkel die gleiche Größe (nämlich 30°) haben, ist die Aussage bewiesen.

b) Wir wissen bereits, dass das Dreieck $\triangle AEC$ einen 60°-Winkel hat, nämlich α. Um zu zeigen, dass $\triangle AEC$ gleichseitig ist, genügt es daher zu zeigen, dass die beiden angrenzenden Schenkel, also $\overline{AE}$ und $\overline{AC}$, gleich lang sind, denn dann sind die anderen beiden Innenwinkel gleich groß, also ebenfalls 60°, woraus die Gleichseitigkeit folgt.

   Wegen $\left|\overline{AB}\right| = 2 \cdot \left|\overline{AC}\right|$ (nach Voraussetzung) verbleibt es zu zeigen, dass $\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{EB}\right|$, denn daraus folgt, dass $\overline{AC}$ und $\overline{AE}$ die gleiche Länge haben. Dazu betrachten wir die Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle BDE$. Diese beiden Dreiecke sind kongruent, denn sie stimmen in den Innenwinkeln und in der Seite $\overline{DE}$ überein. Daraus folgt aber bereits die Behauptung.

[23] Zur Winkelbezeichnung: Sind X, Y und Z Punkte, so meinen wir mit $\angle XYZ$ den Winkel bei Y, der von den Strecken $\overline{YX}$ und $\overline{YZ}$ eingegrenzt wird.

Aufgabe 5.5 (aus MO 480813)**.** Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ und die folgendermaßen definierten Punkte D, E, F: D ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bei A mit der Seite $\overline{BC}$. E liegt auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über B hinaus derart, dass $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ gleich lang sind. F liegt auf der Seite $\overline{AC}$ derart, dass $\overline{CD}$ und $\overline{CF}$ die gleiche Länge haben.

Beweise, dass dann die Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle ADF$ in der Größe ihrer Innenwinkel übereinstimmen.[24]

Lösung. Abbildung 5.6 zeigt eine Zeichnung zu der Aufgabe. Es ist zu zeigen, dass die gleich markierten Winkel die gleiche Größe haben. Wegen des Innenwinkelsummensatzes in den Dreiecken $\triangle AED$ und $\triangle ADF$ genügt es zu zeigen, dass sogar nur zwei Arten von markierten Winkeln übereinstimmen. Für die Winkel bei A ist das trivial, da AD eine Winkelhalbierende ist. Daher reicht es zu zeigen, dass die Winkel $\angle ADF$ und $\angle AED$ gleich groß sind.

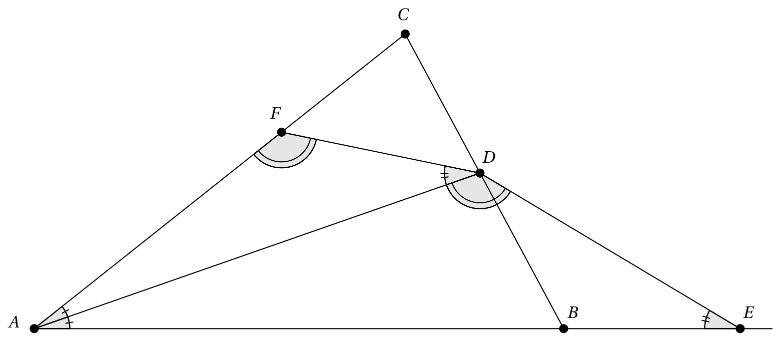


Abbildung 5.6: Zeichnung zu Aufgabe 5.5.

Für den Beweis machen wir eine Winkeljagd. Wir bezeichnen mit α, β und γ die Innenwinkel von $\triangle ABC$, ferner sei ϵ der Winkel $\angle DEA$ und δ der Winkel $\angle FDA$. Um nun $\epsilon = \delta$ zu zeigen, berechnen wir viele andere Winkel in der Figur:

1. Da $\angle EBD$ ein Nebenwinkel zu β ist, hat er die Größe $180° - \beta$. Das Dreieck $\triangle BED$ ist nach Voraussetzung gleichschenklig, somit ist $\angle BDE = \angle DEB$, sodass nach Innenwinkelsummensatz in diesem Dreieck folgt:
$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\angle EBD|) = \frac{1}{2} \cdot (180° - (180° - \beta)) = \frac{\beta}{2}.$$
2. Um den Winkel δ auszurechnen, können wir den Nebenwinkelsatz benutzen. Es gilt nämlich:
$$\delta = 180° - |\angle CDF| - |\angle ADB|.$$
3. Da das Dreieck $\triangle CFD$ nach Voraussetzung gleichschenklig ist, gilt nach Innenwinkelsummen- und Basiswinkelsatz:
$$|\angle CDF| = \frac{1}{2} \cdot (180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$
4. Nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle ABD$ gilt:
$$|\angle ADB| = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2}.$$
5. Aus den letzten drei Schritten folgt:
$$\begin{aligned}\delta &= 180° - |\angle CDF| - |\angle ADB| \\ &= 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(180° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 180° - 90° + \frac{\gamma}{2} - 180° + \beta + \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) - 90°\end{aligned}$$

[24]Wenn zwei Dreiecke die gleichen Innenwinkel haben, dann nennt man sie auch *ähnlich* zueinander.

Nach dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Setzt man dies in die Formel ein[25], folgt $\delta = \frac{\beta}{2}$.

Wir sehen also, dass $\epsilon = \frac{\beta}{2} = \delta$. Das beweist die Behauptung.

In der letzten Aufgabe haben wir eine Technik verwendet, die häufig als „Winkeljagd“ bezeichnet wird: Wir haben ein paar Winkel mit Buchstaben bezeichnet und dann versucht, alle (sinnvollen) anderen Winkel mithilfe von diesen Buchstaben auszurechnen. Dadurch konnten wir am Ende zeigen, dass die beiden gesuchten Winkel gleich groß sind. Die Winkeljagd ist eine der grundlegendsten Methoden in der Geometrie; man kann sie immer ausprobieren, wenn einem gerade nichts anderes zu einer Aufgabe einfällt.

5.2 Kreise und Sehnenvierecke

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit zwei weiteren wichtigen geometrischen Objekten: Kreise und Vierecke. Wie mächtig diese beiden Dinge im Zusammenspiel sind, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

Definition 5.6. Ein *Kreis* k ist die Menge aller Punkte, die von einem fixierten Punkt M den gleichen Abstand r haben (siehe Abbildung 5.7). Wir nennen M den *Mittelpunkt* und r den *Radius* von k.

Jede Strecke $\overline{AB}$ mit Endpunkten A und B auf dem Kreis k heißt *Sehne* von k.

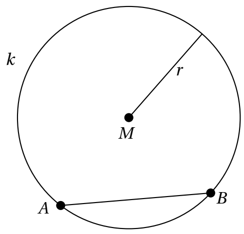


Abbildung 5.7: Ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

Die Eigenschaft, dass alle Punkte auf einem Kreis den gleichen Abstand zu dem Mittelpunkt M haben, erzeugt auf natürliche Weise gleichschenklige Dreiecke, wie wir in den folgenden Anwendungen sehen werden.

Eine ganz wichtige Sorte von Kreisen sind Umkreise. Wir wissen, dass jedes Dreieck einen Umkreis hat. Wie ist es aber mit Vierecken? Es stimmt nicht, dass jedes Viereck einen Umkreis besitzt (zum Beispiel kann man sich leicht ein Parallelogramm konstruieren, wo das nicht der Fall ist). Da Vierecke mit Umkreis eine wichtige Rolle spielen, bekommen sie einen eigenen Namen:

Definition 5.7. Ein Viereck heißt *Sehnenviereck*, wenn es einen Umkreis besitzt, das heißt wenn alle vier Eckpunkte auf einem Kreis k liegen.[26]

Es gibt eine sehr wichtige Charakterisierung von Sehnenvierecken:

Satz 5.8. *Ein Viereck $\square ABCD$ ist dann und nur dann ein Sehnnenviereck, wenn die gegenüberliegenden Winkel sich zu $180°$ ergänzen. Bezeichnet man also die Innenwinkel mit α, β, γ und δ, dann heißt das $\alpha+\gamma = 180°$ und $\beta+\delta = 180°$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jedes Sehnenviereck die Winkelbedingung erfüllt. Sei also $\square ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis k, wie in Abbildung 5.8 zu sehen. Sei M der Mittelpunkt und r der Radius von k.

Zeichnet man die Verbindungsstrecken von M zu den Eckpunkten A, B, C und D des Vierecks ein, so entstehen vier Dreiecke. Diese sind nach Definition von k alle gleichschenklig und haben somit gleichgroße Basiswinkel. Wir bezeichnen diese Basiswinkel wie in der Abbildung zu sehen.

Die Innenwinkelsumme im Viereck $\square ABCD$ beträgt wie in jedem Viereck $360°$. Es gilt also $360° = 2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' + 2\delta'$, das heißt

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 180°.$$

[25]Stattdessen kann man auch zum Beispiel $\alpha = 180° - \beta - \gamma$ einsetzen.

[26]Zur Namensgebung: Wenn alle Eckpunkte auf einem Kreis liegen, dann sind alle Seiten des Vierecks Sehnen dieses Kreises.

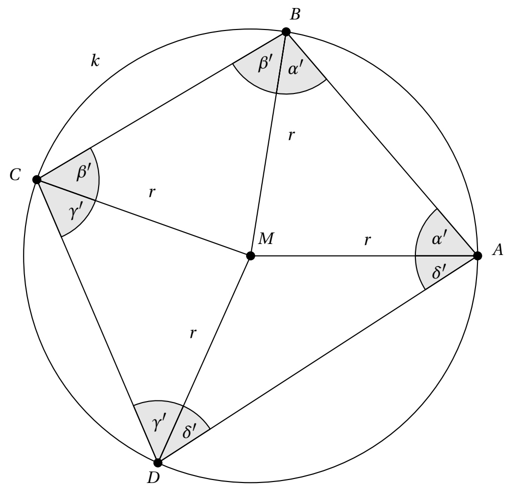


Abbildung 5.8: Zeichnung für den Beweis von Satz 5.8.

Damit folgt aber:

$$|\angle CBA| + |\angle ADC| = (\alpha' + \beta') + (\gamma' + \delta') = 180°,$$
$$|\angle BAD| + |\angle DCB| = (\alpha' + \delta') + (\beta' + \gamma') = 180°.$$

Das ist die zu zeigende Behauptung.[27]

Sei nun umgekehrt $\square ABCD$ ein beliebiges Viereck, dessen gegenüberliegende Innenwinkel sich zu 180° ergänzen. Sei k der Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$. Es genügt zu zeigen, dass D auf k liegt. Wenn das so ist, dann gilt $\beta + \delta = 180°$ (mit den üblichen Bezeichnungen für die Innenwinkel). Man sieht leicht, dass wenn man D ins Innere von k bewegt, $\beta + \delta$ größer wird (denn β ändert sich dabei nicht), und wenn man D nach außen bewegt, $\beta + \delta$ kleiner wird. Somit muss D auf dem Kreis liegen.[28] □

Um den Umgang mit Sehnenvierecken zu lernen, sollte man einige Aufgaben lösen. Dazu eignen sich zum Beispiel die folgenden beiden Aufgaben:

Aufgabe 5.9 (aus MO 510833)**.** Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck und H der Schnittpunkt der Höhen. Der Punkt H werde an der Geraden AB gespiegelt und der Bildpunkt mit H' bezeichnet.

Beweise: Das Viereck $\square AH'BC$ ist ein Sehnenviereck.

Lösung. Abbildung 5.9 zeigt eine Zeichnung zu der Aufgabe. Es ist zu zeigen, dass $\square AH'BC$ ein Sehnenviereck ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass sich die beiden gegenüberliegenden Innenwinkel $\angle BH'A$ und $\angle ACB$ zu 180° ergänzen.

Wir bezeichnen die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ mit α, β und γ, wie üblich. Dann ist $|\angle ACB| = \gamma$. Unser Ziel wird es also sein, eine Formel für den Winkel $\angle BH'A$ in Abhängigkeit von α, β und γ zu finden.

Da H' an AB gespiegelt wurde, ist das Viereck $\square AH'BH$ spiegelsymmetrisch an der Geraden AB, das heißt es gilt

$$\left|\angle BH'A\right| = |\angle AHB|.$$

Den Winkel $\angle AHB$ können wir mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABH$ ausrechnen:

$$|\angle AHB| = 180° - |\angle BAH| - |\angle HBA|.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ABD$ und $\triangle ABE$ sieht man:

$$|\angle BAH| = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta,$$
$$|\angle HBA| = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha.$$

[27] Wir haben angenommen, dass der Punkt M im Innern von $\square ABCD$ liegt. Wenn das nicht der Fall ist, kann man die Behauptung aber auf sehr ähnliche Weise zeigen.

[28] Dieser Beweis ist zugegebenermaßen ziemlich schwammig. Eine präzisere Formulierung sei dem Leser überlassen.

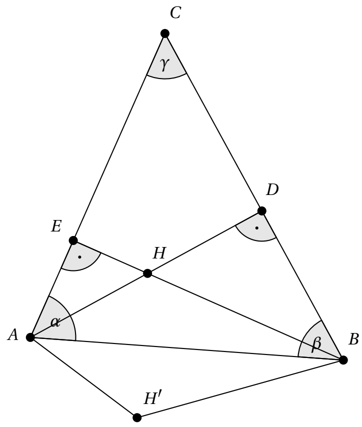


Abbildung 5.9: Zeichnung zum Beweis von Aufgabe 5.9.

Setzt man das in die vorige Formel ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} |\angle AHB| &= 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) \\ &= 180^\circ - 90^\circ + \beta - 90^\circ + \alpha \\ &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$|\angle ACB| + \left|\angle BH'A\right| = \gamma + |\angle AHB| = \gamma + (\alpha + \beta) = 180^\circ,$$

nach Innenwinkelsummensatz in $\triangle ABC$. Das beweist die Behauptung.

Aufgabe 5.10 (aus MO 510824)**.** Gegeben seien vier Kreise mit den Mittelpunkten A, B, C und D, die einander in den Punkten P, Q, R und S berühren, wie in Abbildung 5.10 zu sehen.

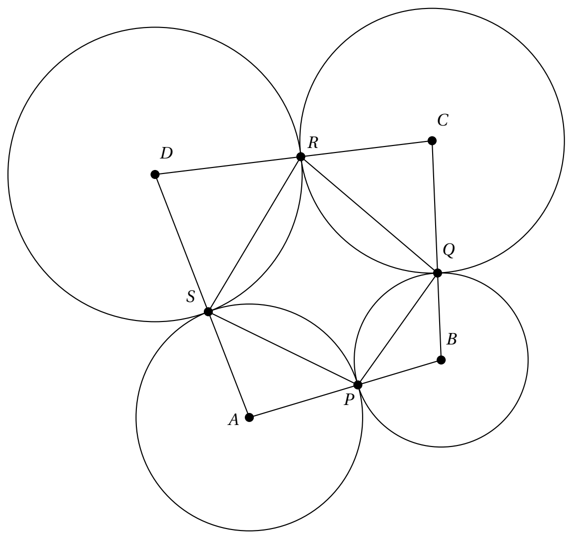


Abbildung 5.10: Zeichnung zu Aufgabe 5.10.

Beweise: Es gibt einen Kreis, auf dem die vier Berührungspunkte liegen.

Lösung. Es ist zu zeigen, dass das Viereck $\square PQRS$ ein Sehnenviereck ist, dass sich in diesem Viereck also die gegenüberliegenden Innenwinkel zu 180° ergänzen.

Nach Definition des Kreises sind die Dreiecke $\triangle APS$, $\triangle BQP$, $\triangle CRQ$ und $\triangle DSR$ gleichschenklig. Wir bezeichnen die jeweils gleichgroßen Basiswinkel mit α, β, γ und δ. Mit dem Nebenwinkelsatz[29] erhalten

[29] Wir setzen hierbei (ohne Beweis) voraus, dass der Berührpunkt zweier Kreise immer auf der Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten der Kreise liegt (das folgt zum Beispiel aus der Symmetrie). Somit liegt also z.B. der Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$.

wir sofort die Innenwinkel des Vierecks:

$$
\begin{aligned}
|\angle QPS| &= 180^\circ - \alpha - \beta, \\
|\angle RQP| &= 180^\circ - \beta - \gamma, \\
|\angle SRQ| &= 180^\circ - \gamma - \delta, \\
|\angle PSR| &= 180^\circ - \delta - \alpha.
\end{aligned}
$$

Damit folgt für die Summe von gegenüberliegenden Innenwinkeln:

$$
\begin{aligned}
|\angle QPS| + |\angle SRQ| &= (180^\circ - \alpha - \beta) + (180^\circ - \gamma - \delta) = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \delta, \\
|\angle RQP| + |\angle PSR| &= (180^\circ - \beta - \gamma) + (180^\circ - \delta - \alpha) = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \delta.
\end{aligned}
$$

Diese beiden Summen sind also gleich groß. Addiert man beide Summen zusammen, so kommt man auf die Summe aller Innenwinkel im Viereck $\square PQRS$, also auf 360°. Somit müssen die beiden Einzelsummen jeweils 180° ergeben, wie zu zeigen war.

5.3 Der Peripheriewinkelsatz

Eine der wichtigsten Anwendungen für Kreise und Sehnenvierecke ist der sogenannte Peripheriewinkelsatz. Er macht eine Aussage über die *Peripheriewinkel* über einem Bogen. Zunächst ein paar grundlegende Definitionen:

Definition 5.11. Sei k ein Kreis und seien A und B Punkte auf k. Der *Bogen* $\overset{\frown}{AB}$ ist der Teil des Kreises von k, den man erhält, wenn man von A aus gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis bis zu B geht.

Ist P ein Punkt auf k, der nicht auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt, dann heißt der Innenwinkel bei P vom Dreieck $\triangle ABP$ *Peripheriewinkel* über $\overset{\frown}{AB}$. In Abbildung 5.11 sind also α und β Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$, γ ist kein Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AB}$, dafür aber über $\overset{\frown}{BA}$.

Häufig sagt man auch nur Peripheriewinkel über der *Sehne* $\overline{AB}$. Der Unterschied zur Notation mit dem Bogen ist, dass bei der Sehne (zumindest rein formal) nicht eindeutig ist, auf welcher Seite der Sehne man den Peripheriewinkel betrachten will. In den meisten Anwendungen ist aber klar, welche Seite gemeint sein soll, sodass die Bezeichnung mit der Sehne zumeist ausreichend ist.

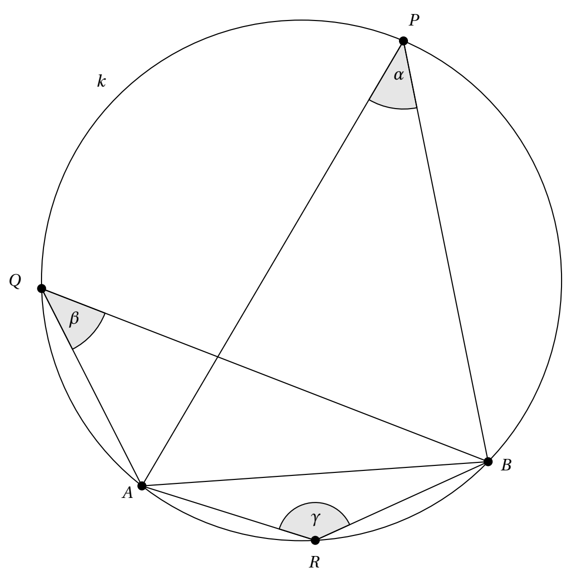


Abbildung 5.11: Abbildung zu Peripheriewinkeln. α und β sind Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$, γ ist ein Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{BA}$.

Was Peripheriewinkel so interessant macht, ist der folgende Satz:

Satz 5.12 (Peripheriewinkelsatz)**.** *Sei k ein Kreis und seien A und B zwei verschiedene Punkte auf k. Dann sind alle Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AB}$ gleich groß.*

Beweis. Betrachte die Abbildung 5.11. Dort seien P und Q zwei beliebige Punkte über dem Bogen $\widehat{AB}$, das heißt α und β sind Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$. Es genügt zu zeigen, dass $\alpha = \beta$, denn da P und Q beliebig gewählt wurden, sind mit dem gleichen Argument alle Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$ gleich groß.

Sei R ein beliebiger Punkt auf dem Bogen $\widehat{AB}$ (wie abgebildet). Dort erhalten wir den Innenwinkel γ. Die zentrale Feststellung ist nun, dass die Vierecke $\square ARBP$ und $\square ARBQ$ Sehnenvierecke sind, da offensichtlich alle Eckpunkte auf einem Kreis liegen. Nach dem Satz über Sehnenvierecke (Satz 5.8) ergänzen sich gegenüberliegende Innenwinkel in diesen Vierecken zu 180°. Das heißt:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 180^\circ \quad (\text{in } \square ARBP), \\ \beta + \gamma &= 180^\circ \quad (\text{in } \square ARBQ). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, denn

$$\alpha = 180^\circ - \gamma = \beta. \qquad \square$$

Eine weitere wichtige Rolle spielen sogenannte Zentriwinkel:

Definition 5.13. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und sei $\overline{AB}$ eine Sehne von k. Dann heißt der Winkel $\angle BMA$ *Zentriwinkel* über dem Bogen $\widehat{AB}$ (zum Beispiel ist der Winkel β in Abbildung 5.12 ein Zentriwinkel über $\widehat{AB}$).

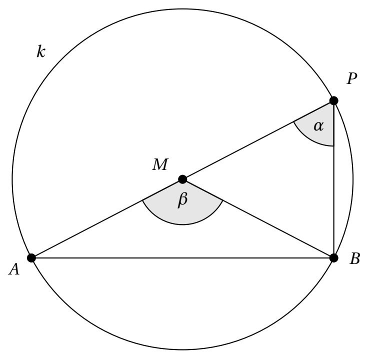


Abbildung 5.12: Zentriwinkel β mit einem speziellen zugehörigem Peripheriewinkel α (siehe Beweis von Satz 5.14).

Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem Zentriwinkel und den Peripheriewinkeln über dem gleichen Bogen:

Satz 5.14 (Zentriwinkelsatz)**.** *Sei k ein Kreis und $\widehat{AB}$ ein Bogen auf k. Dann ist der Zentriwinkel über $\widehat{AB}$ doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$. In Abbildung 5.12 gilt also $\beta = 2\alpha$.*

Beweis. Da alle Peripheriewinkel gleich groß sind, genügt es zu zeigen, dass einer von ihnen die Behauptung erfüllt. Wir verlängern dafür die Strecke $\overline{AM}$ über M hinaus und betrachten den Peripheriewinkel bei dem Schnittpunkt dieser Verlängerung mit dem Kreis k, wie in Abbildung 5.12 zu sehen.

Da M der Mittelpunkt des Kreises ist, sind die beiden Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle BPM$ gleichschenklig. Nach dem Basiswinkelsatz gilt also $|\angle PBM| = \alpha$ und außerdem $|\angle BAM| = |\angle MBA|$, diese Winkelgröße nennen wir γ. Nach dem Innenwinkelsummensatz in den Dreiecken $\triangle ABM$ und $\triangle ABP$ gilt:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \beta + 2\gamma, \\ 180^\circ &= \gamma + (\gamma + \alpha) + \alpha = 2\alpha + 2\gamma. \end{aligned}$$

Daraus folgt bereits die Behauptung, denn wenn man auf beiden Seiten 2γ subtrahiert, dann erhält man

$$\beta = 180^\circ - 2\gamma = 2\alpha. \qquad \square$$

Wir schauen uns zwei Aufgaben zum Peripheriewinkelsatz an:

Aufgabe 5.15 (aus MO 420844)**.** Sei $\square ABCD$ ein Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S und dem Umkreismittelpunkt M. Ferner seien die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang.

Finde eine Formel für die Winkelgröße β des Winkels $\angle DCM$ in Abhängigkeit von der Winkelgröße α des Winkels $\angle ASB$.

Lösung. Diese Aufgabe stammt aus der vierten Stufe der Matheolympiade und ist dementsprechend relativ schwer. Man kann aber einiges aus der Lösung lernen:

Abbildung 5.13 zeigt eine Zeichnung zu der Aufgabe. Die grundlegende Idee ist, dass wir β mit der Innenwinkelsumme in $\triangle CDM$ ausrechnen können, wenn wir die Größe des Winkels $\angle CMD$ kennen (da $\triangle CDM$ gleichschenklig ist). Dieser Winkel ist aber ein Zentriwinkel und damit doppelt so groß wie jeder zugehörige Peripheriewinkel, also z.B. doppelt so groß wie der Winkel $\angle CAD$. Die Frage ist also, wie wir $\angle CAD$ in Abhängigkeit von α berechnen können.

Wenn man sich die Zeichnung anschaut, dann fällt auf, dass die Dreiecke $\triangle SDA$ und $\triangle SBC$ gleichschenklig aussehen. Ist diese Vermutung richtig, dann können wir den Winkel $\angle CAD$ mit der Innenwinkelsumme in $\triangle SDA$ ausrechnen, sofern wir den Winkel $\angle DSA$ kennen. Dieser Winkel ist aber einfach ein Nebenwinkel von α und hat damit die Größe $180° - \alpha$.

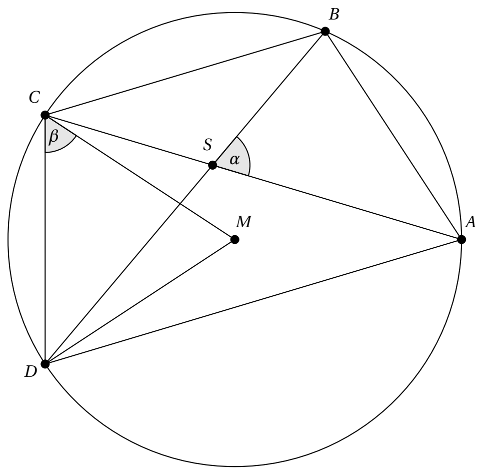


Abbildung 5.13: Zeichnung zu Aufgabe 5.15.

Der soeben geschilderten Idee folgend, führen wir den Beweis schrittweise:

1. Wir zeigen, dass die Dreiecke $\triangle SAB$ und $\triangle SCD$ kongruent sind: Nach Voraussetzung sind die beiden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang. Wir wollen den Kongruemzsatz wsw anwenden, müssen also zeigen, dass die Dreiecke auch in ihren Innenwinkeln übereinstimmen.

   Das ist offensichtlich für die Scheitelwinkel $\angle ASB$ und $\angle CSD$ der Fall. Außerdem sind die Winkel $\angle SBA$ und $\angle DCS$ Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{DA}$ und somit ebenfalls gleich groß. Nach dem Innenwinkelsummensatz haben $\triangle SAB$ und $\triangle SCD$ also die gleichen Innenwinkel und sind kongruent.

2. Wir zeigen, dass das Dreieck $\triangle SDA$ gleichschenklig ist: Wegen der Kongruenz der Dreiecke $\triangle SAB$ und $\triangle SCD$ sind die beiden Strecken $\overline{SA}$ und $\overline{SD}$ gleich lang. Das beweist schon die Behauptung.

3. Mit dem Basis- und Innenwinkelsummensatz in $\triangle SDA$ können wir nun den Winkel $\angle CAD$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}|\angle CAD| &= \frac{1}{2} \cdot (180° - |\angle DSA|)\\ &= \frac{1}{2} \cdot (180° - (180° - \alpha))\\ &= \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

4. Nach dem Zentriwinkelsatz über dem Bogen $\overset{\frown}{CD}$ gilt

$$|\angle CMD| = 2 \cdot |CAD| = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

5. Da das Dreieck $\triangle CDM$ gleichschenklig ist, folgt aus dem Basiswinkelsatz:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\angle CMD|) = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Das ist die gesuchte Lösung.

Aufgabe 5.16 (Südpolsatz)**.** Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges und nicht gleichschenkliges Dreieck. Sei D der Schnittpunkt von der Winkelhalbierenden des Innenwinkels $\angle BAC$ mit der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{BC}$.

Zeige: D liegt auf dem Umkreis von $\triangle ABC$.

Lösung. Statt den Standardweg zu wählen und zu zeigen, dass $\square ABDC$ ein Sehnenviereck ist, wenden wir einen Trick an. Wir können die Behauptung folgendermaßen umformulieren: Zeige, dass die gegebene Winkelhalbierende, die gegebene Mittelsenkrechte und der Umkreis von $\triangle ABC$ alle einen Punkt gemeinsam haben (nämlich D). Um das zu zeigen, können wir auch den Schnittpunkt D' von der Winkelhalbierenden mit dem Umkreis betrachten und zeigen, dass er auch auf der Mittelsenkrechten liegt. Der große Vorteil von dieser Herangehensweise ist, dass wir automatisch wissen, dass all unsere Punkte auf einem Kreis liegen; somit können wir den mächtigen Peripheriewinkelsatz benutzen!

Wir wollen also zeigen, dass die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$ durch den Punkt D' geht. Abbildung 5.14 zeigt eine Zeichnung dazu.

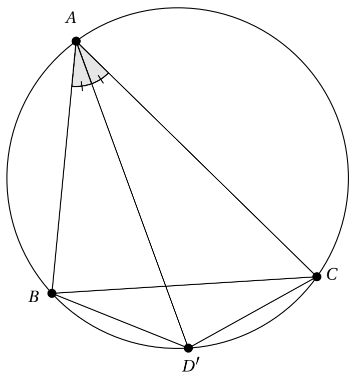


Abbildung 5.14: Zeichnung zum Südpolsatz (Aufgabe 5.16).

Wir betrachten das Dreieck $\triangle BD'C$. Es genügt zu zeigen, dass dieses Dreieck gleichschenklig (mit den Schenkeln $\overline{D'B}$ und $\overline{D'C}$ ist), denn in einem gleichschenkligen Dreieck geht die Mittelsenkrechte der Basis immer durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.

Nach dem Peripheriewinkelsatz über dem Bogen $\widehat{BD'}$ sind die Winkel $\angle BAD'$ und $\angle BCD'$ gleich groß; nach dem Peripheriewinkelsatz über dem Bogen $\widehat{D'C}$ sind auch $\angle D'AC$ und $\angle D'BC$ gleich groß. Da AD' aber die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ ist, haben die Winkel $\angle BAD'$ und $\angle D'AC$ die gleiche Größe, somit also auch die beiden Winkel $\angle BCD'$ und $\angle D'BC$, wie zu beweisen war!

Ein sehr wichtiger Spezialfall des Zentriwinkelsatzes ist der Satz des Thales:

Satz 5.17 (Thales)**.** *Hat das Dreieck $\triangle ABC$ einen rechten Winkel bei C, dann ist $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Umkreises dieses Dreiecks. Ist also $\overline{AB}$ ein Durchmesser eines Kreises k, so liegt jeder Punkt C mit $|\angle ACB| = 90°$ auf k.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$. Da der Innenwinkel bei C ein Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$ ist, gilt für den zugehörigen Zentriwinkel: $|\angle AMB| = 2 \cdot |\angle ACB| = 180°$. Somit bilden die Punkte A, M und B eine Gerade, d. h. $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des Umkreises. □

5.4 Parallelität und Mittelparallelen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns erneut mit Geraden, und zwar ganz speziell mit parallelen Geraden. Zunächst die Definition:

Definition 5.18. Zwei Geraden g und h heißen *parallel* zueinander, wenn sie einander nicht schneiden.[30]

Der nächste Satz formuliert einen fundamentalen Satz über Winkel an parallelen Geraden.

Satz 5.19. *Seien g_1 und g_2 zwei Geraden und sei h eine dritte Gerade derart, dass sie die Geraden g_1 und g_2 schneidet. Seien die Winkel α, β und γ so bezeichnet wie in Abbildung 5.15 zu sehen.*

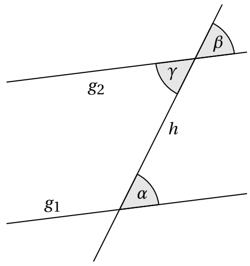


Abbildung 5.15: Stufen- und Wechselwinkel.

Dann gilt:

*i) Die Geraden g_1 und g_2 sind genau dann parallel, wenn $\alpha = \beta$ (*Stufenwinkel*).*

*ii) Die Geraden g_1 und g_2 sind genau dann parallel, wenn $\alpha = \gamma$ (*Wechselwinkel*).*

Wir werden uns nun mit sogenannten Mittelparallelen beschäftigen und damit ein paar interessante Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken beweisen.

Definition 5.20. Seien g_1 und g_2 zwei parallele Geraden. Die *Mittelparallele* zu diesen beiden Geraden ist diejenige Gerade h, die zu g_1 und g_2 parallel ist und den gleichen Abstand von g_1 und g_2 hat (also „genau in der Mitte“ liegt).

Eine sehr einleuchtend klingende, aber trotzdem mächtige Charakterisierung von Mittelparallelen liefert der folgende Satz:

Satz 5.21. *Seien g_1 und g_2 zwei parallele Geraden und sei g_3 die Mittelparallele dieser Geraden. Die Gerade h schneide g_1, g_2 bzw. g_3 in A, B bzw. C. Dann ist C der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.*

Beweis. Abbildung 5.16 zeigt eine Darstellung zum Beweis.

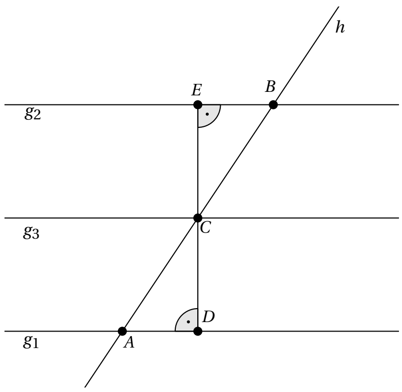


Abbildung 5.16: Zeichnung zu Satz 5.21.

Wir betrachten die zusätzliche Gerade ℓ, welche senkrecht auf g_3 steht und durch C geht. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit g_1 und g_2 nennen wir D und E, wie abgebildet. Zum Beweis der Behauptung genügt es zu zeigen, dass die Dreiecke $\triangle CAD$ und $\triangle CBE$ kongruent zueinander sind, denn dann gilt insbesondere $\left|\overline{CA}\right| = \left|\overline{CB}\right|$.

[30] Diese Definition von Parallelität funktioniert zwar in der Ebene, aber im dreidimensionalen Raum gibt es Geraden, die nicht parallel sind und einander aber trotzdem nicht schneiden (sogenannte *windschiefe* Geraden). Man könnte Parallelität dann als konstanten Abstand definieren.

Die Innenwinkel bei D und E sind jeweils rechte Winkel (nach Konstruktion). Ferner sind die Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ gleich lang, da g_3 genau in der Mitte von g_1 und g_2 liegt. Da auch die Innenwinkel $\angle ACD$ und $\angle ECB$ gleich groß sind (Scheitelwinkel), folgt die behauptete Dreieckskongruenz aus dem Kongruenzsatz wsw. $\square$

Eine wichtige Anwendung des vorigen Satzes ist das folgende Resultat:

Satz 5.22. *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und seien D bzw. E die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$. Dann ist DE parallel zu AB und die Strecke $\overline{DE}$ ist genau halb so lang wie die Strecke $\overline{AB}$.*

Beweis. Der Trick ist, eine weitere Gerade einzuzeichnen: nämlich die Gerade g, die parallel zu AB ist und durch den Punkt C geht (siehe Abbildung 5.17).

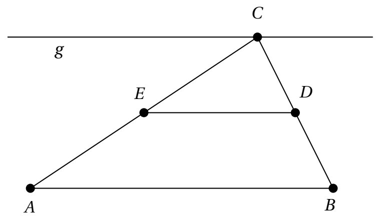


Abbildung 5.17: Zeichnung zu Satz 5.22.

Nach Satz 5.21 liegen die Punkte D und E auf der Mittelparallele der Geraden AB und g. Damit *ist* die Gerade DE aber die Mittelparallele, insbesondere also parallel zu AB (und g).

Die Behauptung über die Länge von $\overline{AB}$ folgt auf ähnliche Weise wie der Beweis von vorigem Satz und sei als Übung dem Leser überlassen. $\square$

Eine interessante und erstaunliche Folgerung ist:

Folgerung 5.23. *Sei $\square ABCD$ ein beliebiges Viereck und seien A', B', C' und D' die vier Seitenmittelpunkte wie in Abbildung 5.18 zu sehen. Dann ist das Viereck $\square A'B'C'D'$ ein Parallelogramm.*

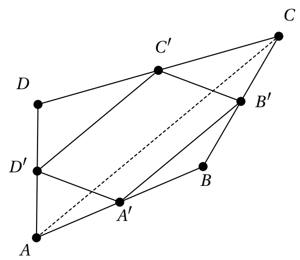


Abbildung 5.18: Viereck mit den vier Seitenmittelpunkten.

Beweis. Wir zeichnen die Diagonale $\overline{AC}$ ein. Dadurch entstehen die zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$. Nach vorigem Satz folgt in $\triangle ABC$, dass $A'B'$ parallel zu AC ist, und analog in $\triangle CDA$, dass $C'D'$ parallel zu AC ist. Beides zusammen beweist die Parallelität von $A'B'$ und $C'D'$. Analog zeigt man, dass $B'C'$ und $D'A'$ parallel sind, womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

5.5 Ausblick auf andere Geometrien

Neben der sogenannten planaren Elementargeometrie, mit der wir uns in dem gesamten Kapitel beschäftigt haben, gibt es viele weitere Konzepte und Ideen in der Mathematik, die man unter dem Begriff „Geometrie“ zusammenfasst. Dieser letzte Abschnitt zeigt einen kleinen Einblick hinein.

Eine erste Möglichkeit der Verallgemeinerung ist in höhere Dimensionen zu gehen. Im dreidimensionalen Raum kann man natürlich genauso wie in der Ebene Punkte, Geraden, Kreise und so weiter betrachten. Allerdings gelten andere Gesetze: zum Beispiel stimmt es im Dreidimensionalen nicht, dass zwei nichtparallele Geraden einander schneiden.

Wenn wir zwei- und dreidimensionale Geometrie betreiben können, warum nicht auch vierdimensionale? Zugegebenermaßen ist die Anschauung im vierdimensionalen Raum etwas schwierig, aber es ist tatsächlich möglich ganz exakt zu definieren was man damit meint. Man kann dann genauso wie in kleineren

Dimensionen Geraden und andere geometrische Objekte betrachten. Allgemein kann man sogar den n-dimensionalen Raum für eine beliebige natürliche Zahl n definieren!

Neben höheren Dimensionen kann man aber auch andere Änderungen vornehmen. Ein gutes Beispiel ist die sogenannte sphärische Geometrie: die „Ebene" ist hierbei eine Kugel, Geraden sind Kreise auf der Kugel, deren Mittelpunkt gleich dem Mittelpunkt der Kugel sind (sogenannte Großkreise) und Strecken sind Teilstücke von Geraden. In der sphärischen Geometrie gelten ganz andere Gesetze als in der ebenen Geometrie. Zum Beispiel haben zwei verschiedene Geraden immer genau zwei Schnittpunkte, außerdem ist die Innenwinkelsumme eines Dreiecks nicht immer 180°.

6 Zahlenbereiche

In diesem Kapitel werden wir einen genaueren Blick auf die verschiedenen Arten von Zahlen werfen. Wir haben uns im Kapitel zu Zahlenkongruenzen bereits ausführlich mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auseinandergesetzt; nun werden wir uns die anderen Zahlenbereiche, also natürliche, rationale, reelle und sogenannte komplexe Zahlen ansehen und uns mit ihren Eigenheiten beschäftigen. Eine zentrale Frage wird dabei jeweils sein, warum man – ausgehend von den natürlichen Zahlen – so viele neue Arten von Zahlen definiert und was man unter dem Begriff „Zahl“ eigentlich versteht.

6.1 Überblick

Eine der grundlegensten Fragen zu Zahlen ist: was ist überhaupt eine Zahl?

Es gibt verschiedene Antworten auf diese Frage, zum Beispiel:

> Eine Zahl ist ein Objekt, das man mit Ziffern darstellen kann.

Diese Charakterisierung trifft auf jeden Fall für alle natürlichen und ganzen Zahlen zu (ein eventuelles Vorzeichen soll uns dabei nicht weiter stören). Wie ist es mit rationalen Zahlen, also zum Beispiel $\frac{3}{5}$? Nun, es gilt $\frac{3}{5} = 0{,}6$, wir haben also Ziffern. Und was ist mit der Zahl $\sqrt{2}$?[31] In der angegebenen Darstellung besteht sie nicht nur aus Ziffern, da wir ein Wurzelzeichen benutzen. Wir können aber $\sqrt{2}$ auch mit Ziffern schreiben: $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$.

Das alles deutet darauf hin, dass die obige „Definition“ von Zahlen gut funktioniert. Wir werden jedoch im Laufe dieses Kapitels auch die sogenannten kopmlexen Zahlen kennenlernen. Eine ganz wichtige komplexe Zahl ist die sogenannte Zahl i und das ist eine Zahl, die zum Quadrat genommen -1 ergibt (wie das möglich ist werden wir in dem entsprechenden Abschnitt sehen). Diese Zahl i lässt sich nicht mit Ziffern darstellen, sofern man i nicht selbst als Ziffer definiert. Da i aber auf jeden Fall eine Zahl ist, scheint die obige Charakterisierung von Zahlen doch nicht hunderprozentig zuzutreffen.

Wir wagen daher die folgende Definition:

> Zahlen sind Objekte, mit denen man die vier Grundrechenarten ausführen kann.

Diese Charakterisierung trifft tatsächlich auf alle Zahlen zu, denn in jedem Zahlenbereich sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (zumindest teilweise) definiert. Die Frage ist nur, ob es nicht auch andere Objekte gibt, also keine Zahlen, mit denen man rechnen kann. Tatsächlich definiert man in der Mathematik noch viele weitere „Strukturen“ mit den vier Grundrechenarten – ob man die Objekte in diesen Strukturen dann Zahlen nennen mag oder nicht, ist jedem selbst überlassen.

Nach dieser philosophischen Einleitung betrachten wir einmal die verschiedenen Zahlenbereiche: wir kennen bereits die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Hinzu kommen die sogenannten reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Alle zusammen ergeben dann die folgende Kette:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Dabei heißt „$\subset$“, dass alle Elemente aus der linken Menge auch zur rechten Menge gehören. Die komplexen Zahlen sind also die größte Zahlenmenge.

Wir werden uns im Folgenden nacheinander allen diesen Zahlenbereichen (ausgenommen den ganzen Zahlen) widmen.

6.2 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Der einfachste Zahlenbereich sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Sie heißen „natürlich“, weil sie sehr tief mit unserem Denken verwoben sind; es sind nunmal die Zahlen, mit denen wir zählen.

Man kann sich nun die berechtigte Frage stellen, was an den natürlichen Zahlen interessant genug ist, um sie näher zu betrachten, zumal sie ja nur eine Teilmenge der ganzen Zahlen sind und wir die ganzen

[31] Zur Erinnerung: mit $\sqrt{2}$ bezeichnen wir diejenige positive Zahl, die zum Quadrat 2 ergibt.

Zahlen doch bereits verstehen. Dazu ist zu sagen, dass, nur weil wir die ganzen Zahlen verstehen, das noch lange nicht heißt, dass wir auch die natürlichen Zahlen verstehen. Zum Beispiel sind die rationalen Zahlen einfacher als die ganzen Zahlen (man kann ja immer teilen), obwohl die ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen sind.

Eine der wesentlichen Eigenschaften der natürlichen Zahlen ist die folgende: Wenn ich bei der Zahl 0 starte und dann in jedem Schritt zu meiner Zahl eins dazuaddiere, dann erreiche ich nach und nach alle natürlichen Zahlen. Auf dieser Idee beruht ein ganz wichtiges Beweisprinzip in der Mathematik, nämlich die sogenannte vollständige Induktion:

Methode 6.1 (vollständige Induktion)**.** Ziel ist es, eine Aussage $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl n abhängt, für *alle* natürlichen Zahlen zu zeigen, also zu beweisen, dass $A(n)$ für alle n aus $\mathbb{N}$ richtig ist.

Dazu führt man die folgenden beiden Schritte aus:

Induktionanfang. Beweise, dass die Aussage für die erste natürliche Zahl gilt, also für $n = 0$.

Induktionsschritt. Beweise, dass wenn die Aussage für irgendeine natürliche Zahl n gilt, dann gilt sie auch für die Zahl $n+1$.

Es ist klar, dass wir damit die Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen haben: Aus dem Induktionsanfang folgt, dass sie für die Zahl 0 gilt. Wenn sie aber für 0 gilt, so folgt aus dem Induktionsschritt, dass sie auch für $1 = 0+1$ richtig ist. Daraus folgt aber (wieder aus dem Indutkionsschritt), dass die Aussage für $2 = 1+1$ stimmt, also auch für 3, für 4, für 5 und so weiter.

Zur Verdeutlichung dieses wichtigen Prinzips schauen wir uns einige Beispiele an:

Beispiel 6.2 (Gaußsche Summenformel)**.** Wir kennen aus dem Kapitel zu Zahlenfolgen die sogenannte Gaußsche Summenformel: Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$0+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir kennen auch bereits einen eleganten Beweis für diese Formel, der auf geschickten Zusammenfassen der Summanden beruht. Man kann die Formel aber auch anders beweisen, nämlich mit vollständiger Induktion. [32] Die zu beweisende Aussage $A(n)$ ist hierbei die Formel $0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang. Wir zeigen, dass die Formel für $n = 0$ gilt. Dann steht auf der linken Seite 0 und auf der rechten Seite $\frac{0\cdot(0+1)}{2}$. Also sind beide Seiten gleich, wie zu zeigen war.

Induktionsschritt. Angenommen, wir haben bereits gezeigt, dass die Formel für eine natürliche Zahl n richtig ist (also zum Beispiel für $n = 0$). Wir zeigen nun, dass die Formel unter dieser Annahme auch für die Zahl $n+1$ gilt.

Nochmal genauer: Angenommen, wir wissen, dass für eine natürliche Zahl n gilt:

$$0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir zeigen, dass unter dieser Annahme folgt:

$$0+1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Dazu formen wir die linke Seite um:

$$\begin{aligned} 0+1+2+\cdots+n+(n+1) &= (0+1+2+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n^2+n}{2}+\frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung.

[32] Diese Formel ist das Standardbeispiel für vollständige Induktion, weshalb wir uns diesen zweiten Beweis anschauen.

Aufgabe 6.3 (Blue Islander Problem)**.** Gegeben sei die folgende Aufgabe: Auf einer abgelegenen Insel im Meer leben Menschen, die allesamt blaue Augen haben. Allerdings verachten die Menschen blaue Augen sehr: wenn ein Inselbewohner herausfindet, dass er blaue Augen hat, dann stürzt er sich in der nächsten Nacht von der Klippe. Auf der Insel gibt es keine Spiegel und niemand redet über die Augenfarbe der anderen, sodass es keine Möglichkeit gibt, seine Augenfarbe zu erraten.

Eines Tages kommt ein Reisender auf die Insel und verweilt dort eine Woche lang. Bei seiner Abreise bedankt er sich herzlich und sagt: „Es war mir eine Freude auf eurer Insel zu wohnen. Noch nie habe ich so schöne blaue Augen gesehen, wie einer von euch sie hat."

Was passiert?

Lösung. Die Aufgabe mag zunächst sehr verwirrend erscheinen, denn der Reisende sagt den Inselbewohnern ja nichts neues: jeder weiß, dass es auf der Insel jemanden mit blauen Augen gibt, denn jeder sieht die blauen Augen von den anderen Inselbwohnern. Tatsächlich werden sich aber alle Inselbewohner nach einigen Tagen umbringen (vorausgesetzt natürlich, sie beherrschen die Logik).

Schauen wir uns zunächst ein paar Spezialfälle an:

1. Angenommen, auf der Insel befindet sich nur ein einziger Bewohner. Dann ist die Situation klar: der Reisende verrät ihm, dass er blaue Augen hat, also stürzt er sich in der ersten Nacht von der Klippe.

2. Wir nehmen nun an, dass sich zwei Bewohner auf der Insel befinden; wir nennen sie A und B. In der ersten Nacht wird sich keiner von beiden umbringen, denn beide können vermuten, dass der Reisende den jeweils anderen gemeint hat. Was aber passiert am zweiten Tag?

   Person A sieht, dass sich Person B nicht umgebracht hat. Nun denkt A: „Wenn ich keine blauen Augen hätte, dann wüsste B, dass der Reisende ihn gemeint haben muss. Folglich hätte B schon am ersten Tag gwusst, dass er blaue Augen hat und hätte sich von der Klippe gestürzt. Also ist meine Annahme falsch, das heißt ich habe blaue Augen." Person B denkt das gleiche, nur über Person A. Daraus folgt, dass sich beide Personen in der zweiten Nacht von der Klippe stürzen.

3. Nun nehmen wir an, dass sich auf der Insel drei Bewohner A, B und C befinden. Man sieht leicht ein, dass sich in den ersten beiden Nächten keiner von ihnen umbringen wird.

   Am dritten Tag denkt A: „Angenommen, ich habe keine blauen Augen. Ich weiß, dass B das ebenfalls von sich denkt, sonst hätte er sich umgebracht. Da C sich in der ersten Nacht nicht umgebracht hat, weiß B, dass C jemanden mit blauen Augen sieht. Da ich aber nach meiner Annahme keine blauen Augen habe, kann B daraus schließen, dass er selbst blaue Augen hat. Dann hätte er sich aber in der zweiten Nacht umbringen müssen! Somit ist meine Annahme falsch, ich habe also blaue Augen." Die Personen B und C denken ähnlich, in der dritten Nacht stürzen sich also alle drei Bewohner von der Klippe.

4. Zuletzt betrachten wir den Fall, dass sich vier Personen auf der Insel befinden; wir nennen sie A, B, C und D. In den ersten drei Nächten bringt sich niemand um.

   Am vierten Tag denkt A: „Angenommen, ich habe keine blauen Augen. Dann verhalten sich die anderen drei Bewohner in ihren Überlegungen so, als gäbe es mich gar nicht, denn mich kann der Reisende ja nicht gemeint haben. Die drei Personen B, C und D verhalten sich also so, als wären sie nur zu dritt auf der Insel und hätten sich somit in der dritten Nacht umbringen müssen (siehe oben). Da sie das nicht getan haben, ist meine Annahme falsch, ich habe also blaue Augen." Folglich stürzt sich A (und nach analoger Argumentation auch die anderen drei) in der vierten Nacht von der Klippe.

Nach diesen vier Spezialfällen können wir nun zum allgemeinen Fall übergehen. Wir bezeichnen mit n die Anzahl der Personen auf der Insel. Die obige Argumentation im Spezialfall $n = 4$ benutzt ganz wesentlich den davor behandelten Fall $n = 3$, man schließt also von dem Fall $n = 3$ auf den Fall $n = 3 + 1$. Dieser Ansatz führt zu der Idee, dass man die Aussage am besten mit vollständiger Induktion beweist:

Wir zeigen: Wenn sich n Personen auf der Insel befinden (dabei sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl), dann stürzen sich alle Personen in der n-ten Nacht von der Klippe.

Induktionsanfang. Den Fall $n = 1$ haben wir bereits oben behandelt.

Induktionsschritt. Angenommen, wir haben bereits gezeigt, dass sich n Personen in der n-ten Nacht umbringen. Nun wollen wir daraus folgern, dass sich $n + 1$ Personen in der $(n + 1)$-ten Nacht von der Klippe stürzen.

Sei A eine der $n + 1$ Personen. Dann denkt A: „Angenommen, ich habe keine blaue Augen. Dann verhalten sich die anderen n Bewohner in ihren Überlegungen so, als gäbe es mich gar nicht, denn mich kann der Reisende ja nicht gemeint haben. Sie verhalten sich also so, als wären sie nur n Personen auf der Insel und bringen sich somit in der n-ten Nacht um (Induktionssannahme!)."

Da alle Personen so denken, wird sich bis zur n-ten Nacht niemand umbringen. Am $(n+1)$-ten Tag erkennen dann alle, dass ihre Annahme falsch war, also stürzen sie sich allesamt in der $(n+1)$-ten Nacht von der Klippe, wie zu beweisen war.

Beispiel 6.4. Wir zeigen: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$2\cdot(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^n)=3^{n+1}-1.$$

Dazu benutzen wir vollständige Induktion nach n:

Induktionsanfang. Der Fall $n=0$ ist einfach, denn

$$2\cdot(3^0)=2=3^{0+1}-1.$$

Induktionsschritt. Angenommen, wir haben bereits gezeigt, dass die Behauptung für eine natürliche Zahl n erfüllt ist, dass also gilt:

$$2\cdot(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^n)=3^{n+1}-1.$$

Wir zeigen, dass sie dann auch für die natürliche Zahl $n+1$ erfüllt ist, das heißt, dass gilt:

$$2\cdot(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n+1})=3^{(n+1)+1}-1.$$

Dazu formen wir die linke Seite um und verwenden dabei die Induktionsvoraussetzung (IV):

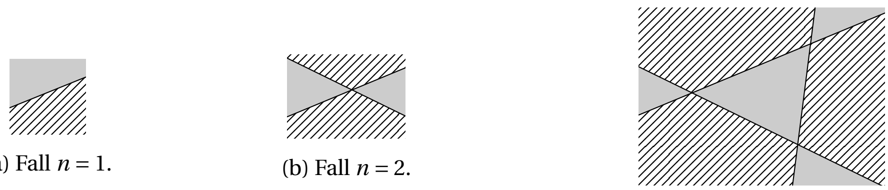
$$\begin{aligned}2\cdot(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n+1}) &= 2\cdot(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^n)+2\cdot3^{n+1}\\ &\overset{\text{(IV)}}{=}(3^{n+1}-1)+2\cdot3^{n+1}\\ &=3\cdot3^{n+1}-1\\ &=3^{n+2}-1.\end{aligned}$$

Das vollendet den Induktionsschritt und beweist somit zusammen mit dem Induktionsanfang die Behauptung.

Die nächste Aufgabe ist eine typische Olympiade-Aufgabe. Sie ist ohne das Prinzip der vollständigen Induktion fast unmöglich zu lösen.

Aufgabe 6.5. Gegeben seien n beliebige Geraden in der Ebene. Diese Geraden zerteilen die Ebene in mehrere Gebiete (diese Gebiete können unendlich groß sein).[33] Zeige, dass man diese Gebiete in rot und blau färben kann derart, dass zwei Gebiete, die eine gemeinsame Seite haben, nicht in der gleichen Farbe gefärbt sind.

Lösung. Wie bei jeder Aufgabe ist es auch hier eventuell hilfreich, sich ein paar Beispiele anzusehen. Abbildung 6.19 zeigt die Fälle $n=1,2,3$. Auch nach langem Überlegen findet man bei dieser Aufgabe womöglich



(a) Fall $n=1$.

(b) Fall $n=2$.

(c) Fall $n=3$.

Abbildung 6.19: Spezialfälle zu Aufgabe 6.5 (die Farben rot und blau sind durch verschiedene Füllmuster dargestellt).

keinen sinnvollen Ansatz. Es lohnt sich aber immer, die Methode der vollständigen Induktion zu probieren; so auch hier! Wir induzieren über die Anzahl n der Geraden:

[33] Interessante Zusatzaufgabe: Wie viele solcher Gebiete können auf diese Art maximal entstehen (in Abhängigkeit von n)?

Induktionsanfang. Der Fall $n = 1$ ist trivial: man färbt eine der Halbebenen rot, die andere blau.

Induktionsschritt. Angenommen, wir haben bereits gezeigt, dass man die von beliebigen n Geraden erzeugten Gebiete auf die gewünschte Art färben kann (für eine feste natürliche Zahl n). Wir zeigen, dass dies dann auch bei $n+1$ Geraden möglich ist.

Es seien also $n+1$ beliebige Geraden gegeben. Wir möchten unsere Induktionsvoraussetzung benutzen, also dass die Behauptung für n Geraden stimmt. Um dies zu bewerkstelligen, können wir eine Gerade, nennen wir sie g, entfernen, sodass also nur noch n Geraden übrigbleiben. Nach der Induktionsvoraussetzung können wir die von den verbleibenden n Geraden erzeugten Gebiete wie gewünscht färben. Wenn wir nun die Gerade g wieder hinzutun (und die Färbung beibehalten), dann funktioniert die Färbung zwar nicht mehr ganz, aber fast: Wenn zwei Gebiete eine gemeinsame Seite haben, die nicht von g erzeugt wurde, dann haben sie verschiedene Farben (wie gewünscht), wenn sie aber g als gemeinsame Seite haben, dann haben sie auf jeden Fall die gleiche Farbe.

Wie können wir unsere Färbung so modifizieren, dass sie ganz funktioniert? Nun, wir wählen eine Seite von g und wechseln in allen Gebieten auf dieser Seite die Farbe (von rot zu blau und von blau zu rot). Es ist nicht schwer zu sehen, dass die so entstehende Färbung alle Anforderungen erfüllt.

Das beweist den Induktionsschritt.

6.3 Die rationalen Zahlen

Nach dem eingehenden Studium der natürlichen Zahlen wenden wir uns nun den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu. Zur Erinnerung: die rationalen Zahlen sind all diejenige Zahlen, die man als Bruch von zwei ganzen Zahlen schreiben kann, wobei im Nenner natürlich keine 0 stehen darf. Insbesondere gibt es auch negative rationale Zahlen.

Ein paar Beispiele für rationale Zahlen:

- Die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{7}{5}, \frac{42}{163}$ sind rationale Zahlen.
- Der Bruch $\frac{-3}{5}$ ist ebenfalls eine rationale Zahl. Es gilt $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$, denn man darf Minuszeichen immer vor den Bruch ziehen. Zum Beispiel ist $\frac{-2}{-3} = --\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.
- Auch Doppelbrüche sind erlaubt, zum Beispiel ist

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{5} : \frac{7}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{6}{7}.$$

Die wichtigste Eigenschaft für $\mathbb{Q}$ ist die folgende:

Satz 6.6. *In $\mathbb{Q}$ sind alle vier Grundrechenarten „+“, „−“, „·“ und „:“ immer durchführbar (außer Division durch 0).*

Diese Eigenschaft haben $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ nicht. Das ist im übrigen auch der Grund, weshalb man die rationalen Zahlen „erfunden“ hat.

Die Tatsache, dass Division in $\mathbb{Q}$ immer durchführbar ist, macht $\mathbb{Q}$ gewissermaßen uninteressanter als $\mathbb{Z}$: die Frage nach Teilbarkeit und somit die ganze Theorie der Zahlenkongruenzen braucht man in $\mathbb{Q}$ nicht. Wir fokussieren uns daher im Folgenden nicht auf die arithmetische Struktur von $\mathbb{Q}$ (also auf das Rechnen darin), sondern auf zwei andere Aspekte: Mächtigkeit und Kommadarstellung.

Mächtigkeit

Wir beginnen mit der Frage nach der sogenannten Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$. Allgemein bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge M die Größe dieser Menge. Die Mächtigkeit von $M = \{1,2,3\}$ ist also 3, genauso wie die Mächtigkeit von $N = \{10, 62, -\frac{3}{4}\}$. Bei unendlichen Mengen ist die Frage nach der Mächtigkeit etwas schwieriger zu beantworten, denn man kann nicht einfach zählen. Tatsächlich gilt aber: Es gibt verschiedene Mächtigkeiten für unendliche Mengen, das heißt es gibt zwei unendliche Mengen, sodass die eine größer ist als die andere.

Bevor wir diese Feststellung beweisen, müssen wir erstmal ein Gefühl für unendliche Mächtigkeiten bekommen. Dafür schauen wir uns zunächst drei Beispiele an.

Beispiel 6.7. a) Wir betrachten die Menge

$$M_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\},$$

also die Menge aller natürlichen Zahlen größer oder gleich 2. Das ist offensichtlich eine unendliche Menge, aber was ist mit ihrer Mächtigkeit? Hat M_1 die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ oder ist M_1 kleiner?

Die naive Antwort wäre zu sagen, dass M_1 kleiner ist, denn M_1 enthält die natürlichen Zahlen 0 und 1 nicht. Tatsächlich ist M_1 aber genauso groß wie $\mathbb{N}$, denn: Ein Außerirdischer, der unser Zahlensystem nicht kennt und somit auch keine Ahnung von den natürlichen Zahlen hat, der schaut auf M_1 und denkt: „M_1 besteht aus einer unendlichen Folge von Symbolen. Das erste Symbol ist 2, dann kommt 3, dann 4 und so weiter. $\mathbb{N}$ besteht ebenfalls aus einer unendlichen Folge von Symbolen, das erste Symbol ist 0, dann kommt 1, dann 2 und so weiter. Also sind beide Mengen gleich groß.“ Oder anders gesagt: Nur weil die Zahlen in M_1 anders heißen als die in $\mathbb{N}$, bedeutet das nicht, dass es weniger geben muss, denn beide Mengen enthalten eine unendliche Zahlenfolge.

b) Wir betrachten nun die Menge

$$M_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\},$$

also die Menge aller geraden Zahlen. Mit der gleichen Begründung wie im vorigen Beispiel ist auch M_2 genau so groß wie $\mathbb{N}$, denn die Elemente aus M_2 bilden eine unendliche Zahlenfolge, genauso wie die Elemente aus $\mathbb{N}$.

c) Als letztes betrachten wir die Menge

$$M_3 = \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Wiederum stellen wir die Frage nach der Mächtigkeit: ist $\mathbb{Z}$ größer als $\mathbb{N}$? Intuitiv würde man sagen, dass $\mathbb{Z}$ größer ist, denn $\mathbb{Z}$ ist „in beide Richtungen unendlich“ und $\mathbb{N}$ nur in eine. Das liegt aber nur daran, dass wir die ganzen Zahlen üblicherweise auf einem in beide Richtungen unendlichen Zahlenstrahl aufmalen. Was ist aber, wenn wir den Zahlenstrahl zwischen 0 und -1 durchschneiden und den negativen Teil umklappen? Wir erhalten die Abbildung 6.20.

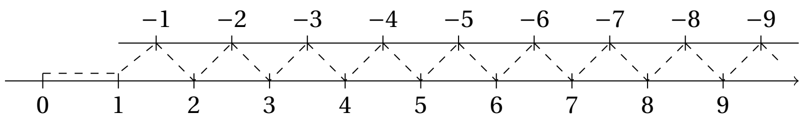


Abbildung 6.20: Veranschaulichung des Durchzählens der ganzen Zahlen.

Wenn wir nun die ganzen Zahlen in der durch den gestrichelten Strich angegebenen Reihenfolge durchlaufen, dann haben wir die ganzen Zahlen als unendliche Folge aufgeschrieben:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}.$$

Also ist $\mathbb{Z}$ tatsächlich nicht größer als $\mathbb{N}$, sondern genauso groß. Der Grund dafür, dass $\mathbb{Z}$ größer wirkt, ist einfach nur, dass man $\mathbb{Z}$ normalerweise auf dem Zahlenstrahl aufmalt.

Die vorigen drei Beispiele motivieren die folgende Definition:

Definition 6.8. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn man die Elemente von M als unendliche Zahlenfolge schreiben kann, das heißt wenn man jedem Element von M auf eindeutige Weise eine Nummer zuordnen kann. Dann lässt sich M schreiben als

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, \dots\}$$

und ist genauso groß wie $\mathbb{N}$.

Wir wenden uns nun der eingangs gestellten Frage nach der Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ zu. Gibt es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen? Auf dem Zahlenstrahl sieht das auf jeden Fall so aus, denn schon zwischen 0 und 1 gibt es unendlich viele rationale Zahlen. Tatsächlich gilt aber:

Satz 6.9. *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Man kann also alle rationalen Zahlen in eine unendliche Zahlenfolge schreiben.*

	1	2	3	4	5	6	…
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	
⋮							⋱

Abbildung 6.21: Veranschaulichung des Durchzählens der rationalen Zahlen.

Beweis. Der Beweis bedient sich der in Abbildung 6.21 dargestellten Tabelle, die alle positiven rationalen Zahlen enthält (die Spalte gibt den Zähler und die Zeile den Nenner an). Entlang der gestrichelten Linie kann man alle Zahlen in der Tabelle durchzählen, dabei überspringt man einfach diejenigen Zahlen, die sich doppeln (zum Beispiel ist $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$).

Für die Menge $\mathbb{Q}_{>0}$ der positiven rationalen Zahlen erhält man somit

$$\mathbb{Q}_{>0} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}.$$

Um nun auch die nichtpositiven Zahlen abzuzählen bedienen wir uns dem gleichen Trick wie für die ganzen Zahlen: abwechselnd positiv und negativ. Damit erhalten wir

$$\mathbb{Q} = \left\{0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\right\}. \qquad \square$$

Bemerkung 6.10. Dass es genau so viele rationale wie natürliche Zahlen gibt ist alles andere als intuitiv. Es zeigt, dass unendliche Mengen sich dem menschlichen Vorstellungsvermögen entziehen: wir sind von Natur aus nur darauf trainiert, mit endlichen Mengen umzugehen. Ein Beispiel zur Verdeutlichung (neben der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen): Es sei N die Anzahl aller in unserem Universum befindlichen Atome, also eine extrem große Zahl (allein in einem Menschen sind Milliarden, wenn nicht Billionen von Atomen enthalten und allein das für uns sichtbare Universum ist riesig). Trotz der unvorstellbaren Größe von N ist N eine ganz normale natürliche Zahl und ist genauso weit weg von „unendlich“ wie jede andere natürliche Zahl!

Eine berechtigte Frage ist zudem, ob es denn überhaupt unendliche Mengen gibt, die nicht abzählbar sind, die also größer sind als $\mathbb{N}$. Die Antwort ist ja; wir werden uns eins der wichtigsten Beispiele für eine solche Menge im nächsten Abschnitt ansehen.

Kommadarstellung

Nun wenden wir uns dem zweiten Thema über rationale Zahlen zu: der Kommadarstellung. Neben der Bruchschreibweise kann man jede rationale Zahl auch als Dezimalkommazahl schreiben, also zum Beispiel $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Neben endlichen Kommadarstellungen gibt es auch unendliche, zum Beispiel

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\cdots = 0{,}\overline{3}.$$

Die Frage ist, woran man einer Kommazahl ansieht, dass sie eine rationale Zahl darstellt, also auch als Bruch geschrieben werden kann. Die Antwort darauf gibt der folgende Satz:

Satz 6.11. *Eine Kommazahl ist genau dann rational, wenn sie endlich oder periodisch ist.*

Beweis. Wir müssen beide Richtungen zeigen:

1. Wir zeigen, dass jede rationale Zahl eine endliche oder periodische Kommadarstellung hat: Ist $\frac{a}{b}$ eine beliebige rationale Zahl, dann erhält man die Kommadarstellung, indem man die schriftliche Division $a : b$ ausführt. Dabei tritt nach jedem Schritt ein Rest modulo b auf und die nächste Ziffer hängt ab einem gewissen Schritt nur noch von diesem Rest ab, da man lediglich eine 0 „von oben holt". Da es modulo b nur endlich viele verschiedene Reste gibt müssen sich die Reste und somit die Ziffern irgendwann wiederholen oder abbrechen (Rest 0), die Kommadarstellung hat also die gewünschte Form.

2. Wir zeigen, dass jede endliche oder periodische Kommazahl eine rationale Zahl ist: Für endliche Kommazahlen ist das klar. Sei also x eine periodische Kommazahl, zum Beispiel $x = 0{,}\overline{23}$. Mit folgenden Schritten erhalten wir daraus eine Darstellung als Bruch: Multiplikation mit 100 liefert $100x = 23{,}\overline{23}$, anschließende Subtraktion von x führt zu $99x = 23$. Also ist $x = \frac{23}{99}$. Allgemein muss man 100 durch 10 hoch die Länge der Periode ersetzen und kommt zu einem ähnlichen Ergebnis. Wenn die Kommazahl nicht reinperiodisch ist, wie zum Beipsiel bei $1{,}\overline{23}$, dann kann man zunächst eine Bruchdarstellung für den periodischen Teil finden und anschließen den nichtperiodischen Teil dazuaddieren, also z.B.

$$1{,}\overline{23} = 1 + 0{,}\overline{23} = 1 + \frac{23}{99} = \frac{122}{99}.$$ □

6.4 Die reellen Zahlen

Nach dem Studium der rationalen Zahlen, also aller Bruchzahlen, widmen wir uns nun einem ungleich größeren Zahlenraum: die Menge der sogenannten reellen Zahlen, abgekürzt mit $\mathbb{R}$.

Die Definition für $\mathbb{R}$ ist recht simpel:

Definition 6.12. Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* ist die Menge aller als Dezimalzahl darstellbaren Zahlen.

Beispiele für reelle Zahlen sind also

- $2, -\frac{5}{4}, 0{,}416$ und alle anderen rationalen Zahlen,
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, usw.
- die Kreiszahl π, die Eulersche Zahl e.

Diejenigen reellen Zahlen, die nicht rational sind, nennen wir *irrationale* Zahlen. Einige der wichtigsten mathematischen Konstanten (zum Beispiel π) sind irrational, weshalb die reellen Zahlen eine so große Bedeutung haben[34].

Rechnen in den reellen Zahlen

Es gilt:

Satz 6.13. *In $\mathbb{R}$ sind alle vier Grundrechenarten ausführbar (außer Division durch 0); außerdem kann man aus jeder nichtnegativen reellen Zahl eine Wurzel ziehen.*

Letzteres heißt, dass es zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ eine reelle Zahl x gibt, sodass $x^2 = a$. Man sieht leicht, dass mit x auch $-x$ eine Wurzel ist. Um die Notation $\sqrt{a}$ eindeutig zu machen, definieren wir:

Definition 6.14. Ist a eine nichtnegative reelle Zahl, so bezeichnen wir mit $\sqrt{a}$ diejenige Wurzel aus a, die nicht negativ ist.

Durch geschicktes Annähern (siehe letzten Abschnitt im Kapitel zu Zahlenfolgen) kann man beliebig viele Stellen von $\sqrt{a}$ berechnen. So erhält man zum Beispiel

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$$

Eine interessante Frage ist, ob die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ periodisch ist, ob wir die Dezimalziffern also theoretisch vollständig angeben könnten. Aus Satz 6.11 wissen wir, dass das genau dann der Fall wäre, wenn $\sqrt{2}$ rational ist. Tatsächlich gilt aber:

[34] Genau genommen liegt der Grund für die Bedeutung der reellen Zahlen vor allem in ihrer sogenannten *Vollständigkeit*. Diese besagt, dass jede Zahl, die man beliebig genau annähern kann, auch existiert. Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig, denn man kann π beliebig genau durch rationale Zahlen annähern, trotzdem existiert π nicht (in $\mathbb{Q}$!).

Satz 6.15. *Die reelle Zahl* $\sqrt{2}$ *ist irrational.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar ist. Dafür gehen wir indirekt vor: Angenommen, die Zahl $\sqrt{2}$ ist rational. Dann gibt es natürliche Zahlen a und b mit $b \neq 0$, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ gilt. Wir führen diese Annahme nun auf einen Widerspruch und beweisen somit, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Wenn wir die Gleichung $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ quadrieren, dann erhalten wir

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit b^2, so folgt (man beachte $\frac{a^2}{b^2} \cdot b^2 = a^2$)

$$2b^2 = a^2.$$

Wir betrachten nun die Primfaktorzerlegung auf beiden Seiten. Auf der rechten Seite hat jede Primzahl eine gerade Häufigkeit, denn egal wie oft eine Primzahl in a vorkommt, in a^2 kommt sie doppelt so oft vor. Mit dem gleichen Argument hat jede Primzahl in b^2 eine gerade Häufigkeit. Durch die Multiplikation mit 2 bekommt die Primzahl 2 aber auf der linken Seite eine ungerade Häufigkeit, denn sie kommt einmal öfter vor als in b^2. Da 2 auf der rechten Seite der Gleichung eine gerade Häufigkeit hat, haben wir den gewünschten Widerspruch gefunden. □

Da die Darstellung von $\sqrt{2}$ nicht periodisch ist, kann man nicht alle Dezimalziffern von $\sqrt{2}$ angeben. Man kann lediglich beliebig viele davon ausrechnen und dieses Ergebnis als gute Näherung von $\sqrt{2}$ benutzen. Es gibt verschiedene Verfahren für solch eine Näherung; das einfachste solcher Verfahren wurde im Abschnitt „Konvergenz“ des Kapitels „Zahlenfolgen“ behandelt.

Mächtigkeit

Genau wie bei den rationalen Zahlen wollen wir uns auch bei $\mathbb{R}$ die Frage nach der Mächtigkeit stellen, das heißt wir wollen untersuchen, wie viele reelle Zahlen es gibt. Im vorigen Abschnnitt hatten wir definiert, was eine abzählbare Menge ist und wir hatten festgestellt, dass sogar $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, dass es also in $\mathbb{Q}$ nicht mehr Zahlen gibt als in $\mathbb{N}$. Nach diesem erstaunlichen Ergebnis ist man berechtigterweise vorsichtig, wenn man Aussagen über die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ treffen will. Tatsächlich gilt aber:

Satz 6.16. *Die Menge* $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar, man kann die Elemente darin also nicht abzählen.*

Beweis. Ähnlich wie im vorigen Satz gehen wir indirekt vor. Wir nehmen also an, dass wir die reellen Zahlen abzählen können, das heißt, dass es eine Abzählung

$$\mathbb{R} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}$$

gibt. Wir zeigen nun: egal wie man versucht die reellen Zahlen abzuzählen, es gibt immer eine Zahl, die man nicht mitgezählt hat (genau genommen gibt es immer unendlich viele solche Zahlen, aber die Existenz einer einzigen genügt). Dazu konstruieren wir die reelle Zahl x folgendermaßen: Vor dem Komma hat x nur eine 0, ferner sei die k-te Dezimalstelle von x eine 0, wenn a_k an der k-ten Stelle keine 0 hat, und eine 1 sonst. Auf diese Weise unterscheidet sich x von a_k an der k-ten Stelle hinter dem Komma, das heißt x ist verschieden von a_k für *jedes* k. Folglich ist x nicht in der Liste, wie zu zeigen war.

$$\begin{array}{lccccccc}
a_1: & 0, & \underline{8} & 1 & 5 & 9 & 3 & \cdots \\
a_2: & 9, & 2 & \underline{0} & 4 & 1 & 8 & \cdots \\
a_3: & 3, & 1 & 4 & \underline{1} & 5 & 9 & \cdots \\
a_4: & 2, & 7 & 1 & 8 & \underline{2} & 8 & \cdots \\
a_5: & 0, & 1 & 1 & 5 & 9 & \underline{0} & \cdots \\
\vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}$$

Abbildung 6.22: Beispiel für die Konstruktion im Beweis von Satz 6.16. Heraus kommt $x = 0{,}01001\dots$

Abbildung 6.22 zeigt ein Beispiel für die Konstruktion von x. Die unterstrichenen Ziffern sind diejenigen, die man bei der Konstruktion betrachtet. □

Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ ist zum einen eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen und beweist zum anderen die Existenz von Mengen, die größer sind als $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ ist nicht nur ein bisschen größer als $\mathbb{N}$, sondern gewissermaßen unendlich mal größer als $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$. Ein Beispiel zur Verdeutlichung: Wenn man eine Nadel auf den Zahlenstrahl fallen lässt, dann trifft sie mit Sicherheit keine rationale Zahl, weil es davon im Vergleich zu $\mathbb{R}$ viel zu wenige gibt.

6.5 Die komplexen Zahlen

Mit den reellen Zahlen haben wir einen überabzählbar großen Zahlenbereich kennengelernt. Wir können fast alle Operationen in $\mathbb{R}$ ausführen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind immer möglich und sogar die Wurzel aus nichtnegativen Zahlen existiert immer. Allerdings gibt es keine Wurzeln aus negativen Zahlen, denn zum Beispiel ist die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ nicht lösbar: für jedes x aus $\mathbb{R}$ ist nämlich x^2 nicht negativ, also insbesondere ungleich -1.

Die Unlösbarkeit von $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ heißt jedoch nicht, dass man diese Gleichung nicht durch eine geschickte Erweiterung des Zahlenbereichs doch lösen kann. So sind wir schließlich bei allen vorigen Zahlenbereichserweiterungen vorgegangen: in $\mathbb{N}$ ist zum Beispiel die Rechnung $3-5$ nicht lösbar, was zu $\mathbb{Z}$ führt; dort ist die Rechnung $3:5$ nicht ausführbar, also konstruierten wir $\mathbb{Q}$. Wir gehen also analog vor und fordern die Existenz einer Zahl, die die Gleichung $x^2 = -1$ löst, die also eine Wurzel aus -1 ist. Diese Zahl nennen wir i (das steht für „imaginär“, also nicht real).

Da wir natürlich mit der neuen Zahl i rechnen können wollen, existieren auch viele weitere neue Zahlen, zum Beispiel:

$$i+1, \quad 3-2i^2, \quad i^3, \quad \frac{1}{i}, \quad (i+2)(3i-1), \quad \frac{2+i}{3-2i}.$$

Unser erstes Ziel ist, ein bisschen Ordnung in diesen bunten Zahlenhaufen zu bringen. Man kann nämlich all die oben genannten Zahlen so umformen, dass sie in der Form $a+bi$ für zwei reelle Zahlen a und b sind:

- Es gilt $i+1 = 1+1\cdot i$, für diese Zahl ist also $a=1$ und $b=1$.
- Unter Benutzung von $i^2=-1$ (so haben wir i schließlich definiert!) erhält man
  $$3-2i^2 = 3-2\cdot(-1) = 5 = 5+0\cdot i.$$
  Hier ist also $a=5$ und $b=0$.
- Es gilt
  $$i^3 = i^2\cdot i = (-1)\cdot i = 0+(-1)\cdot i,$$
  also ist hier $a=0$ und $b=-1$.
- Der Bruch $\frac{1}{i}$ ist ein bisschen schwieriger umzuformen als die vorigen Zahlen. Der Trick ist, geschickt zu erweitern. Wenn wir nämlich mit i erweitern, steht im Nenner plötzlich i^2, also -1, und durch -1 teilen ist nichts anderes als mit -1 zu multiplizieren:
  $$\frac{1}{i} = \frac{1\cdot i}{i\cdot i} = \frac{i}{-1} = -i = 0+(-1)\cdot i.$$
  Hier ist also $a=0$ und $b=-1$.
- Ausmultiplizieren ergibt
  $$(i+2)(3i-1) = 3i^2 - i + 6i - 2 = 3\cdot(-1) - i + 6i - 2 = -5+5i,$$
  also $a=-5$ und $b=5$.
- Für den Bruch $\frac{2+i}{3-2i}$ verwenden wir den gleichen Trick wie bei $\frac{1}{i}$: wir erweitern geschickt. Die Zahl, mit der wir erweitern müssen, erhält man, indem man im Nenner alle Vorkommen von i durch $-i$ ersetzt. In diesem Fall müssen wir also mit $3+2i$ erweitern:
  $$\frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i)(3-2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+3i-4i-2i^2}{9-6i+6i-4i^2} = \frac{8-i}{13} = \frac{8}{13} + \left(-\frac{1}{13}\right)i.$$
  Hier ist also $a=\frac{8}{13}$ und $b=-\frac{1}{13}$.

Auf ähnliche Weise kann man jede der neuen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben. Wir definieren also:

Definition 6.17. Die Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* ist die Menge aller Zahlen von der Form $a + bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind und i die Eigenschaft $i^2 = -1$ hat.

Jede komplexe Zahl ist also durch Angabe von genau zwei reellen Zahlen (nämlich a und b) festgelegt. Somit können wir die komplexen Zahlen in eine Ebene einzeichnen, wobei die Zahl $a + bi$ bei dem Punkt mit der x-Koordinate a und der y-Koordinate b eingezeichnet wird. Abbildung 6.23 zeigt diese Ebene.

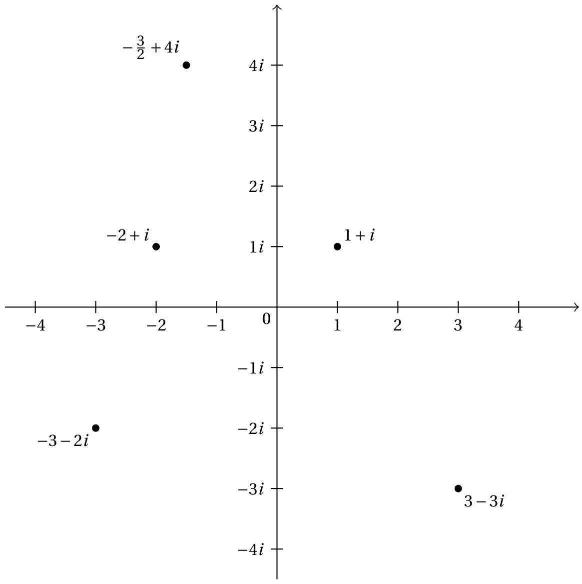


Abbildung 6.23: Die komplexe Zahlenebene und ein paar Beispielzahlen.

Wir sehen: der Strahl der reellen Zahlen ist die x-Achse in der Zahlenebene, das heißt die Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ geschieht, indem man auch über und unter dem Zahlenstrahl Zahlen zulässt.

Nun da wir die komplexen Zahlen in einer Ebene veranschaulicht haben, wollen wir uns ansehen, wie sich die Addition und die Multiplikation von komplexen Zahlen in dieser Ebene darstellt:

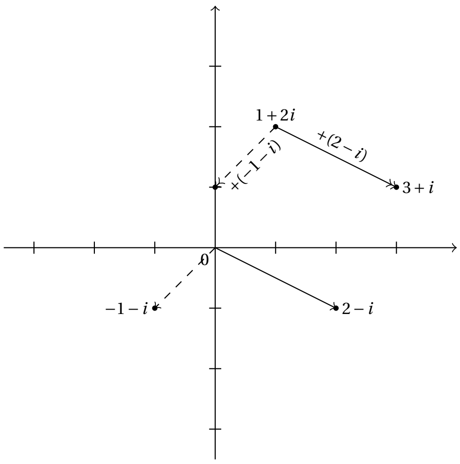
Addition. Wir betrachten beispielhaft die Addition der beiden Zahlen $1 + 2i$ und $2 - i$. Das Ergebnis davon ist $3 + i$. Zeichnet man alle drei Punkte in die Ebene und verbindet $1 + 2i$ und $3 + i$ mit einem Pfeil, so sieht man, dass dieser Pfeil der nach oben rechts parallel verschobene Pfeil von 0 nach $2 - i$ ist (siehe Abbildung 6.24a). Ein analoges Bild ergibt sich, wenn man zu $1 + 2i$ die Zahl $-1 - i$ addiert.

Wir sehen also: Man addiert zwei Zahlen z und w in der komplexen Zahlenebene, indem man den Verbindungspfeil von 0 zu w parallel verschiebt, bis dessen Anfangspunkt bei z liegt. Der neue Endpunkt des Pfeils ist dann das Ergebnis $z + w$.

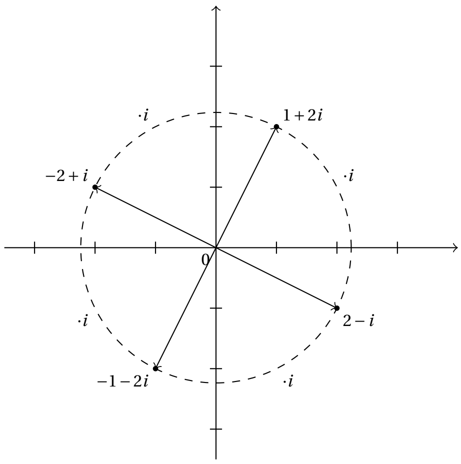
Multiplikation. Die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen ist im Allgemeinen nicht so leicht zu veranschaulichen, daher beschränken wir uns auf die Multiplikation mit i am Beispiel der Zahl $1 + 2i$. Wir sehen $i \cdot (1 + 2i) = -2 + i$. Zeichnet man diese Zahlen in die Ebene (siehe Abbildung 6.24b), so sieht man, dass die zweite Zahl die um 90° um den Ursprung gedrehte erste Zahl ist (gegen den Uhrzeigersinn).

Die Abbildung zeigt auch die Ergebnisse weiterer Multiplikationen mit i; es wird jeweils um 90° weitergedreht, bis man nach dem vierten Mal wieder bei der Ausgangszahl ankommt. Letzteres ist nicht überraschend, denn vier mal mit i zu multiplizieren ist das gleiche wie mit i^4 zu multiplizieren und es gilt $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.

Wir haben gesehen, dass man in $\mathbb{C}$ alle vier Grundrechenarten ausführen kann. Außerdem existiert in $\mathbb{C}$ eine Wurzel aus negativen reellen Zahlen (zum Beispiel ist $2i$ eine Wurzel aus -4 oder $\sqrt{3}i$ eine Wurzel aus -3). Existiert aber auch die Wurzel aus allen *komplexen* Zahlen? Also zum Beispiel auch die Wurzel aus i? Die Antwort ist ja, auch wenn wir das noch nicht beweisen können. Wir fassem diese Eigenschaft in folgendem Satz zusammen:



(a) Addition von zwei Zahlen.



(b) Multiplikation mit i.

Abbildung 6.24: Addition und Multiplikation in der komplexen Zahlenebene.

Satz 6.18. *In den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind alle vier Grundrechenarten und das Ziehen von Wurzeln immer möglich.*[35]

Dieser Satz hat zur Folge, dass es nach $\mathbb{C}$ keine weiteren Zahlenerweiterungen gibt. In $\mathbb{C}$ sind schließlich alle Operationen, die man sich wünschen könnte, bedingungslos ausführbar[36].

Die Einführung in die komplexen Zahlen beendet somit unseren Exkurs durch die verschiedenen Zahlenbereiche. Wir kennen nun die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen, jede mit seinen speziellen Eigenschaften.

[35] Es gilt sogar eine etwas allgemeinere Eigenschaft, die man „algebraisch abgeschlossen" nennt. Grob gesagt bedeutet sie, dass man in $\mathbb{C}$ alle Gleichungen in x lösen kann, bei denen nur Potenzen von x, komplexe Zahlen und Summen davon vorkommen, also zum Beispiel $3x^3 - 5x^2 = i - x^4$.

[36] Außer die Division durch 0, aber eine Division durch 0 lässt sich nur situationsabhängig definieren.

7 Olympiade-Strategien

In diesem Kapitel wollen wir uns ein paar Standardstrategien widmen, die in der Mathematik-Olympiade und ähnlichen Wettbewerben zum Einsatz kommen. Der Fokus dieses Kapitels liegt dabei hauptsächlich auf dem Lösen von verschiedenen olympiadeartigen Aufgaben, bei denen die jeweilige Strategie sehr wirkungsvoll angewendet werden kann. Tatsächlich ist die Kenntnis solcher Strategien in einigen Fällen das, was den Unterschied zwischen „unlösbar“ und „einfach“ ausmacht!

7.1 Färbungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Aufgaben, die durch geschickte Färbung der gegebenen Objekte gelöst werden können. Ein Musterbeispiel für diese Färbungsstrategie ist die folgende Aufgabe:

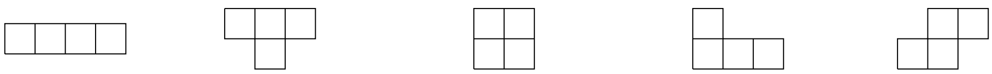
Aufgabe 7.1. Es ist kein Problem, ein 8×8-Schachbrett mit 2×1-Dominosteinen zu belegen, sodass sich die Steine nicht überlappen und jedes Feld abgedeckt ist. Was ist aber, wenn man zwei gegenüberliegende Ecken des Schachbretts wegschneidet? Ist eine Belegung dann noch möglich?

Lösung. Wenn man ein bisschen probiert, so gelangt man schnell zu der Vermutung, dass eine Belegung nicht möglich ist. Dies zu beweisen ist mit „herkömmlichen Methoden“, also zum Beispiel einer Fallunterscheidung, äußerst schwierig bzw. fast unmöglich. Es gibt aber einen ganz simplen Beweis, der die Färbung des Schachbretts benutzt.

Jeder Dominostein, egal wie man ihn auf dem Schachbrett platziert (solange er genau zwei Felder auf dem Brett abdeckt), belegt genau ein weißes und genau ein schwarzes Feld. Wenn es also eine Belegung des modifizierten Schachbretts mit Dominosteinen gäbe, dann würden diese Dominsteine genauso viele weiße wie schwarze Felder abdecken, das heißt unser Brett hätte genau so viele weiße wie schwarze Felder. Da wir aber zwei gegenüberliegende Ecken vom ursprünglichen Schachbrett abgeschnitten hatten und diese beiden Ecken somit die gleiche Farbe haben, gibt es auf dem modifizierten Brett entweder mehr weiße oder mehr schwarze Felder. Widerspruch!

Die wesentliche Idee in der letzten Aufgabe war, das gegebene Brett so zu färben, dass jeder Stein, den wir darauf legen, eine bestimmte Zahl von weißen und von schwarzen Feldern abdeckt. Auf diese Weise haben wir den gewünschten Widerspruch erzeugen können. Wir betrachten nun einige weitere Aufgaben, die mit der gleichen Strategie gelöst werden können:

Aufgabe 7.2. Ist es möglich, aus den in Abbildung 7.25 dargestellten Bausteinen ein Rechteck zu legen?



(a) I-Tetromino (b) T-Tetromino (c) Quadrat-Tetromino (d) L-Tetromino (e) Z-Tetromino

Abbildung 7.25: Tetrominos

Lösung. Offensichtlich müsste ein solches Rechteck 20 Felder haben. Das Rechteck hat also die Form 1×20, 2×10 oder 4×5. Es ist leicht zu sehen, dass man aus den gegebenen Bausteinen kein 1×20-Rechteck legen kann. Es ist auch nicht sonderlich schwer zu zeigen, dass kein $2 \cdot 10$-Rechteck möglich ist: von den vier Feldern neben dem I-Tetromino höchstens drei Felder von den anderen Steinen belegt werden.

Es verbleibt somit der Fall des 4×5-Rechtecks. Es ist möglich, diesen Fall durch geschickte Fallunterscheidungen auszuschließen. Wir wählen aber stattdessen einen sehr eleganten Beweis mittels Färbung: Angenommen, das 4×5-Rechteck lässt sich mit den fünf Bausteinen belegen. Wir färben die Felder des Rechtecks mit einem Schachbrettmuster. Es ist leicht zu sehen, dass dann jeder der fünf Steine außer dem T-Tetromino genau zwei schwarze und zwei weiße Felder belegt. Das T-Tetromino belegt hingegen drei Felder der einen Farbe und eins von der anderen. Folglich müsste es, damit die Belegung möglich ist, verschiedene Anzahlen von weißen und schwarzen Feldern geben. Das ist aber nicht der Fall, denn von beiden Farben gibt es je genau 10 Felder. Widerspruch!

Aufgabe 7.3. Kann man ein 8×8-Schachbrett mit 15 T-Tetrominos und einem I-Tetromino (siehe Abbildung 7.25) vollständig belegen?

Lösung. Die Antwort ist nein, und der Beweis geht analog zur vorigen Aufgabe: die T-Tetrominos belegen jeweils eine ungerade Zahl von weißen und schwarzen Feldern. Da wir ungerade viele T-Tetrominos zur Verfügung haben, belegen sie also insgesamt jeweils eine ungerade Anzahl von schwarzen und weißen Feldern.

Das I-Tetromino belegt hingegen je zwei weiße und zwei schwarze Felder, folglich müsste das Schachbrett für eine gewünschte Belegung eine ungerade Anzahl von weißen und schwarzen Feldern haben. Das ist aber nicht der Fall.

Aufgabe 7.4. Zeige, dass man ein 10×10-Schachbrett nicht mit I-Tetrominos (also 1×4-Steinen) vollständig belegen kann.

Lösung. Diese Aufgabe ist ein bisschen schwieriger als die vorigen Aufgaben, denn die übliche Schachbrettfärbung führt nicht zum Ziel: jedes I-Tetromino belegt genau zwei weiße und zwei schwarze Felder, was jedoch keinen Widerspruch erzeugt.

Wir benötigen daher eine andere Färbung des Brettes. Dazu ist es zweckreich, nicht nur zwei Farben zu verwenden, sondern vier. Mit diesen vier Farben (wir nennen sie der Einfachheit halber 1, 2, 3 und 4) färben wir nun das Rechteck so, wie in Abbildung 7.26 zu sehen (diese Färbung ist gewissermaßen eine verallgemeinerte Schachbrettfärbung).

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Abbildung 7.26: Färbung zu Aufgabe 7.4.

Man sieht schnell, dass jedes I-Tetromino jede der vier Farben genau einmal belegt, egal wie man es in dem 10×10-Brett platziert. Wäre es also möglich, das Brett mit I-Tetrominos zu belegen, dann gäbe es von jeder Farbe gleich viele Felder. Das ist aber nicht der Fall, denn zum Beispiel gibt es 25 Felder mit Farbe 1, aber 26 Felder mit Farbe 2.

Aufgabe 7.5. Ein rechteckiger Boden wurde mit Fliesen belegt, wobei jede Fliese die Form eines I- oder eines Quadrat-Tetrominos (siehe Abbildung 7.25) hat. Nun wird eine der Fliesen durch eine der jeweils anderen Art ersetzt. Zeige, dass man dann das *gleiche* Rechteck nicht mehr belegen kann, auch wenn man alle Fliesen umlegen darf.

Lösung. Wir färben das Rechteck auf geschickte Weise, und zwar so, dass jedes Quadrat-Tetromino eine ungerade Anzahl von schwarzen und weißen Feldern belegt, und jedes I-Tetromino eine gerade Anzahl. Die Abbildung 7.27 zeigt zwei solche Färbungen.

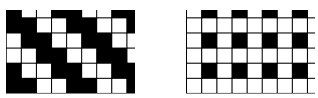


Abbildung 7.27: Zwei mögliche Färbungen zu Aufgabe 7.5.

Aufgrund der genannten Eigenschaft unserer Färbung ist die Geradheit der Anzahl der weißen Felder (oder analog der schwarzen Felder) durch die Anzahl der Quadrat-Tetrominos, mit denen man das Rechteck belegt, festgelegt: bei einer geraden Anzahl von Quadrat-Tetrominos gibt es eine gerade Anzahl von weißen Feldern und bei einer ungeraden Anzahl von Quadrat-Tetrominos gibt es eine ungerade Anzahl von weißen Feldern. Man sieht sofort: tauscht man eine Fliese aus, so wird diese Bedingung verletzt (da sie vorher gültig war), also kann man das Rechteck nicht mehr belegen.

Aufgabe 7.6. Auf jedem Feld eines 5×5-Bretts sitzt ein Käfer. Auf ein Signal springt jeder Käfer in Diagonalrichtung ein Feld weiter (jeder Käfer wählt zufällig eine der möglichen Diagonalrichtungen). Zeige, dass nach dem Hüpfen mindestens 5 Felder frei sind.

Lösung. Der Trick ist wieder einmal, die Felder des Brettes geschickt zu färben. Wir verwenden die in Abbildung 7.28 dargestellte Färbung.

Man sieht leicht: Jeder Käfer ändert beim Hüpfen die Farbe seines Feldes. Zu Beginn gibt es 10 Käfer auf schwarzen Feldern. Folglich gibt es nach dem Hüpfen 10 Käfer auf weißen Feldern (und 15 Käfer auf schwarzen Feldern). Insbesondere bleiben 5 weiße Felder frei.

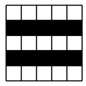


Abbildung 7.28: Färbung zu Aufgabe 7.6.

Aufgabe 7.7. Gegeben sei das folgende Netz von Straßen und Städten. Zeige, dass es keinen Weg durch dieses Straßennetz gibt, der jede Stadt genau einmal besucht.

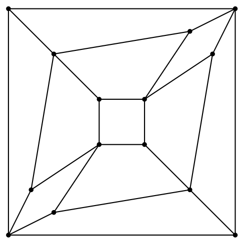


Abbildung 7.29: Straßennetz zu Aufgabe 7.7.

Lösung. Diese Aufgabe zeigt, dass Färbung auch sehr effektiv an Stellen eingesetzt werden kann, wo man sie zunächst nicht erwartet. Der Trick ist, die 14 Städte in schwarz und weiß zu färben, und zwar so, dass je zwei an eine gemeinsame Straße angrenzende Städte verschiedene Farben haben. Man sieht schnell, dass das möglich ist, und dass man dabei 8 Städte in einer und 6 Städte in der anderen Farbe erhält. Jeder Rundweg durch das Städtenetz besucht abwechselnd weiße und schwarze Städte (so wurde die Färbung konstruiert), insbesondere hat man nach 14 Bewegungen genauso viele weiße wie schwarze Städte besucht. Das ist aber nicht möglich, da es von den beiden Farben verschiedene Anzahlen von Städten gibt!

7.2 Schubfachprinzip

Wir widmen uns nun dem sogenannten Schubfachprinzip. Das Prinzip ist sehr simpel: Wenn man $n+1$ Kugeln in n Schubfächer tut, dann enthält eines der Schubfächer mindetens 2 Kugeln. Durch geschickte Wahl der „Schubfächer“ und der „Kugeln“ lassen sich sehr elegante Existenzbeweise führen, wie wir in den folgenden Aufgaben sehen werden.

Aufgabe 7.8. Zeige, dass es unter 13 Leuten zwei gibt, die im gleichen Monat Geburtstag haben.

Lösung. Dies ist eine direkte Anwendung des Schubfachprinzips. Die „Schubfächer“ sind die Monate und die „Kugeln“ sind die Personen.

Aufgabe 7.9. In einem Raum seien 100 Personen. Zeige, dass es dann mindestens zwei Personen A und B gibt, sodass A und B die gleiche Anzahl von Personen im Raum kennen.

Lösung. Die zu beweisende Aussage ist die Existenz von zwei Personen die eine bestimmte Eigenschaft gemeinsam haben. Da das Schubfachprinzip uns die Existenz von zwei „Kugeln“ in einem bestimmten „Schubfach“ garantiert, ist es naheliegend, die 100 Personen als „Kugeln“ und die möglichen Anzahlen der Bekanntschaften als „Schubfächer“ zu betrachten. Der Beweis geht nun wie folgt.

Ordne jeder Person die Anzahl ihrer Bekanntschaften zu. Es gibt 100 mögliche solche Anzahlen, nämlich $0, 1, 2, \ldots, 99$. Es kann aber nicht sowohl eine Person mit 0 Bekanntschaften und eine mit 99 Bekanntschaften existieren, folglich können nur 99 der 100 möglichen Anzahlen belegt sein. Nach dem Schubfachprinzip gibt es somit zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Bekannschaften haben.

Aufgabe 7.10. In einem Raum seien 6 Personen. Zeige, dass man unter diesen 6 Personen 3 finden kann, sodass sich diese drei Personen entweder untereinander kennen oder allesamt nicht untereinander kennen.

Lösung. Bevor wir zur Lösung dieser Aufgabe schreiten, formulieren wir sie zunächst ein wenig um: Wir stellen die 6 Personen durch Punkte dar und verbinden je zwei Punkte entweder mit einer roten oder einer blauen Linie, rot für „kennen sich“ und blau für „kennen sich nicht“. Zu zeigen ist nun, dass egal in welchen Farben man die Linien wählt, es immer drei Punkte mit gleichfarbigen Verbindungslinien gibt (also ein einfarbiges Dreieck existiert). Abbildung 7.30 zeigt ein Beispiel.

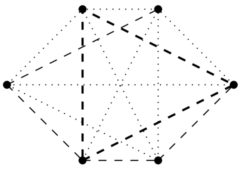


Abbildung 7.30: Beispielgraph zur Lösung von Aufgabe 7.10. Die Farben sind durch gestrichelte bzw. gepunktete Linien dargestellt.

Um nun auf den gesuchten Beweis zu kommen, ist es wahrscheinlich hilfreich, eine Färbung der Linien so zu suchen, dass kein Dreieck entsteht und dabei zu schauen, woran dieser Versuch scheitert. Wir zeigen direkt den Beweis: Wähle einen beliebigen Punkt x aus und betrachte die fünf Verbindungslinien, die von x ausgehen. Da es nur zwei Farben gibt, haben drei dieser Verbindungslinien die gleiche Farbe (das ist das Schubfachprinzip!). Seien a, b und c die Endpunkte dieser drei Verbindungslinien und sei F die gemeinsame Farbe. Falls eine der Linien zwischen a, b und c (also zum Beispiel die Linie von a nach b) die Farbe F hat, dann entsteht automatisch ein F-farbiges Dreieck, wenn man den Punkt x dazunimmt. Andernfalls haben alle Verbindungsliniene zwischen a, b und c die von F verschiedene Farbe, sind also gleichfarbig. In jedem Fall haben wir ein gleichfarbiges Dreieck.

Aufgabe 7.11. Fünf Fliegen sitzen in einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seiten die Länge 2 haben. Zeige, dass es dann zwei Fliegen gibt, deren Abstand kleiner oder gleich 1 ist.

Lösung. Wir wollen das Schubfachprinzip anwenden. Es ist naheliegend, als „Kugeln“ die fünf Fliegen zu wählen. Wir müssen jeder dieser Fliegen nun ein derartiges „Schubfach“ zuordnen, dass zwei Fliegen im gleichen Schubfach auf jeden Fall einen Abstand kleiner oder gleich 1 haben. Dazu zerlegen wir das gegebene Dreieck in vier kleinere gleichseitige Dreieck, wie in Abbildung 7.31 zu sehen.

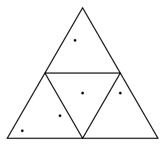


Abbildung 7.31: Zerlegung des gleichseitigen Dreiecks und beispielhafte Fliegen zu Aufgabe 7.11.

Da es 5 Fliegen und 4 Dreiecke gibt, sitzen zwei Fliegen im gleichen Dreieck. Jedes der Dreiecke hat die Seitenlänge 1, daher haben zwei Fliegen im gleichen Dreieck auf jeden Fall einen Abstand ≤ 1.[37]

7.3 Invarianzprinzip

Zuletzt schauen wir uns eine dritte Strategie an, das sogenannte Invarianzprinzip. Invarianz heißt in etwa „Unveränderlichkeit“ – die Idee der Strategie ist also nach Dingen zu suchen, die sich nicht ändern. Zur Verdeutlichung des Prinzips folgen einige Aufgaben.

Aufgabe 7.12. Es stehen 9 Schalen in einem Kreis und in jeder Schale liegt eine Murmel. Du darfst nun zwei benachbarte Schalen auswählen und aus beiden Schalen je eine Murmel herausnehmen (falls beide Schalen nicht leer sind) oder in beide Schalen je eine Murmel hineinlegen. Kannst du durch mehrmaliges Ausführen dieses Schrittes alle Schalen leeren?

Lösung. Die Antwort ist nein. Der Trick ist der folgende: In jedem Schritt verändert sich die Anzahl der Murmeln um 2 (entweder kommen 2 Murmeln hinzu oder es werden 2 Murmeln entfernt). Da diese Anzahl zu Beginn 9, also ungerade ist, bleibt sie für immer ungerade. Die Anzahl 0 (d. h. alle Schalen leer) ist also nicht erreichbar.

Dieser Beweis benutzte ganz wesentlich das Invarianzprinzip: die Invariante ist in diesem Fall die Parität[38] der Gesamtzahl der Murmeln: sie ändert sich nicht. Da sie am Anfang anders ist als am gewünschten Ziel, ist das Ziel nicht erreichbar.

[37] Es sei dem Leser als Übung überlassen zu zeigen, dass zwei Fliegen in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a einen Abstand $\leq a$ haben.

[38] Die Parität einer ganzen Zahl gibt an, ob die Zahl gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 7.13. An der Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 30. In einem Schritt darfst du zwei Zahlen a und b wegwischen und durch die Zahl $a-b$ ersetzen. Da sich durch diesen Vorgang die Anzahl der Zahlen um eins verringert, bleibt irgendwann nur noch eine Zahl übrig. Zeige, dass diese Zahl ungerade ist.

Lösung. Wir machen zunächst ein kleines Beispiel: Angenommen, am Anfang stehen die Zahlen 1 bis 6 an der Tafel. Nun können wir zum Beispiel 1 und 6 wegwischen und durch -5 ersetzen, das heißt jetzt stehen $2,3,4,5,-5$ an der Tafel. Dann nehmen wir 5 und -5 und ersetzen sie durch 10, also haben wir $2,3,4,10$. Jetzt machen wir 2 und 3 zu -1, also $-1,4,10$; dann -1 und 4 zu -5 und schließlich 10 und -5 zu 15. Das ist eine ungerade Zahl, wie gewünscht.

Wir beweisen nun, dass das immer der Fall ist, bei 1 bis 30. Dazu suchen wir uns eine geeignete Invariante, also eine Eigenschaft, die in jedem Schritt erhalten wird. Wir stellen zwei solche Invarianten vor:

1. Die Parität der Anzahl der ungeraden Zahlen ändert sich nicht in einem Schritt, denn: sind a und b gerade, dann werden zwei gerade Zahlen weggewsischt und eine gerade Zahl kommt hinzu, das heißt die Anzahl der ungeraden Zahlen bleibt gleich; sind a und b ungerade, so werden zwei ungerade Zahlen weggewischt und eine gerade Zahl kommt hinzu, das heißt die Anzahl der ungeraden Zahlen verringert sich um zwei; ist genau eine der beiden Zahlen a und b gerade (und die andere ungerade), dann wird eine ungerade Zahl weggewischt und eine ungerade Zahl kommt hinzu. Wir sehen also, dass sich die Anzahl der ungeraden Zahlen in jedem Schritt entweder gar nicht oder um zwei ändert, die Parität dieser Anzahl bleibt also konstant.

   Am Anfang gibt es 15 ungerade Zahlen, also eine ungerade Anzahl. Somit gibt es auch am Ende eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen, das heißt die übrig gebliebene Zahl muss ungerade sein.

2. Die Parität der Summe aller Zahlen ändert sich nicht in einem Schritt, denn: Durch das Entfernen von a und b verändert sich die Summe um $-a-b$, durch das Hinzufügen von $a-b$ wird die Summe um $a-b$ größer, insgesamt ändert sie sich also um

   $$-a-b+(a-b)=-2b,$$

   eine gerade Zahl.

   Zu Beginn ist die Summe gleich $\frac{30(30+1)}{2}=15\cdot 31$, sie ist also ungerade. Somit ist die Summe auch am Ende ungerade, das heißt die verbleibende Zahl ist ungerade.

Aufgabe 7.14. Gegeben sei ein 8×8-Schachbrett mit der üblichen Färbung. Nun darfst du eine Zeile oder eine Spalte des Brettes auswählen und die Farbe aller Felder in der gewählten Zeile oder Spalte invertieren, also weiß durch schwarz und schwarz durch weiß ersetzen.

Kannst du durch wiederholtes Anwenden dieses Schrittes erreichen, dass genau ein Feld schwarz ist und alle anderen Felder weiß sind?

Lösung. Durch Probieren stellt man fest, dass sich die Parität der Anzahl der schwarzen Felder in einem Schritt nicht ändert. Der Beweis dafür geht folgendermaßen: Angenommen, in der gewählten Spalte (oder Zeile) gibt es eine ungerade Anzahl schwarzer Felder. Dann gibt es auch eine ungerade Anzahl weißer Felder, nach dem Invertieren gibt es also wiederum eine ungerade Anzahl schwarzer Felder. Ist die Anzahl der schwarzen Felder in der Spalte oder Zeile dagegen gerade, so ist auch die Anzahl der weißen Felder in diesem Bereich gerade, nach dem Invertieren bleibt die Anzahl der schwarzen Felder also gerade. Wir sehen somit, dass sich die Parität der schwarzen Felder in der ausgewählten Spalte oder Zeile nicht verändert, somit verändert sich auch nicht die Parität der Gesamtzahl der schwarzen Felder.

Zu Beginn gibt es 32, also eine gerade Anzahl schwarzer Felder, folglich bleibt die Anzahl der schwarzen Felder immer gerade. Somit ist der gewünschte Zustand mit genau einem schwarzen Feld nicht erreichbar.

Aufgabe 7.15. Auf einem Tisch liegen 3 rote, 4 grüne und 5 blaue Steine. Nun darfst du zwei verschiedenfarbige Steine entfernen und dafür einen Stein der dritten Farbe hinzulegen. Durch geschicktes mehrmaliges Anwenden dieses Zuges ist es möglich, am Ende nur noch einen einzelnen Stein auf dem Tisch zu haben. Welche der drei Farbe kann dieser Stein haben?

Lösung. Wir machen zunächst ein Beispiel: Im Folgenden beschreiben wir mit drei Zahlen r,g,b den Zustand, dass r rote, g grüne und b blaue Steine auf dem Tisch liegen. Zu Beginn haben wir also $3,4,5$. Nun führen wir folgende Schrittfolge durch:

$$3,4,5\to 2,3,6\to 3,2,5\to 2,3,4\to 1,2,5\to 0,1,6\to 1,0,5\to 0,1,4\to 1,0,3\to 0,1,2\to 1,0,1\to 0,1,0.$$

Am Ende bleibt genau ein grüner Stein übrig, das heißt grün ist eine mögliche Endfarbe. Die verbleibende Frage ist, ob auch rot oder blau übrigbleiben kann.

Die Antwort ist nein, wie wir durch folgende Untersuchung beweisen: In jedem Schritt ändert sich die Anzahl der Steine einer jeden Farbe um 1, das heißt alle drei Anzahlen ändern ihre Parität. Zu Beginn haben wir ungerade, gerade, ungerade (das heißt rot hat eine gerade Anzahl, grün eine ungerade, blau eine gerade). Nach dem ersten Schritt sind die Paritäten also gerade, ungerade, gerade, danach wieder ungerade, gerade, ungerade. Wir sehen, dass es nur die beiden Möglichkeiten ungerade, gerade, ungerade und gerade, ungerade, gerade gibt. Würde ein einzelner roter Stein übrigbleiben, so bedeutete dies die Konfiguration ungerade, gerade, gerade, welche nicht möglich ist. Analog für blau.

Abschließend stellen wir noch eine etwas schwierigere Aufgabe vor, die zeigt, dass es manchmal sehr schwer sein kann die richtige Invariante zu finden.

Aufgabe 7.16. In einem Kreis stehen 8 Schalen mit je einer Murmel drin. Nun darfst du zwei benachbarte Schalen auswählen und je eine Murmel hineintun oder je eine herausnehmen (sofern möglich). Kannst du durch mehrmaliges Anwenden dieses Schrittes die Konfiguration in Abbildung 7.32 erreichen?

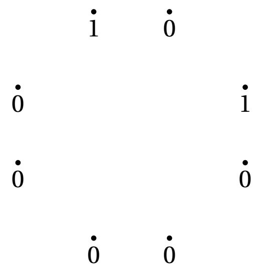


Abbildung 7.32: Zu erreichende Konfiguration in Aufgabe 7.16.

Lösung. Die einfachste Idee für eine Invariante wäre die Parität der Anzahl der Murmeln. Diese ist aber zu Beginn gerade und auch in der gewünschten Endkonfiguration gerade, hilft also nicht.

Eine etwas schlauere Invariante ist die folgendermaßen berechnete alternierende Summe S: Man nimmt jede zweite Schale und addiert die Anzahlen der Murmeln darin, dann subtrahiert man die Anzahlen der Murmeln in den restlichen Schalen. Man kann sich relativ leicht davon überzeugen, dass S sich durch den angegebenen Schritt nicht ändert, da zwei benachbarte Schalen mit verschiedenen Vorzeichen in die Summe eingehen. Zu Beginn ist $S = 0$. In dem gewünschten Ende wäre $S = 2$, das ist also nicht erreichbar.

7.4 Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel drei verschiedene Strategien kennengelernt, die zum Lösen von Olympiadeaufgaben angewendet werden können: Färbungen, Schubfachprinzip und Invarianzprinzip.

Färbungen sind oft sehr hilfreich, wenn man beweisen will, dass etwas nicht existiert (wie zum Beispiel eine bestimmte Belegung eines Brettes), indem man durch geschickte Färbung der gegebenen Objekte einen Widerspruch erzeugt.

Das Schubfachprinzip hingegen wird angewendet, um die *Existenz* von bestimmten Objekten zu zeigen. Aufgaben zum Schubfachprinzip erkennt man häufig daran, dass die Existenz von zwei (oder mehr) Objekten zu beweisen ist, die allesamt eine bestimmte Eigenschaft gemeinsam haben. Die Objekte sind dann die „Kugeln“ und die Eigenschaft wird durch die „Schubfächer“ beschrieben.

Das Invarianzprinzip dient ähnlich den Färbungen meist dazu, etwas zu widerlegen. Es ist immer dann sehr hilfreich, wenn die Aufgabe das wiederholte Anwenden einer bestimmten Modifikation (also eines „Schrittes“) beinhaltet.

8 Kombinatorik

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Kombinatorik. Grob gesagt geht es dabei um das Zählen bestimmter Mengen, wie zum Beispiel der Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge ein Rennen mit 10 Personen ausgehen kann. Dadurch spielt die Kombinatorik gerade in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine sehr große Rolle; einige kombinatorische Ideen ziehen sich aber auch durch die gesamte Mathematik.

Wir werden uns zunächst Formeln zum Zählen von ein paar grundlegenden Mengen ansehen. Anschließend werfen wir einen genaueren Blick auf die Binomialkoeffizienten, die uns bereits bei den Zahlenfolgen begegnet sind. Wir werden feststellen, dass Binomialkoeffizienten auf ganz natürliche Weise in der Kombinatorik auftreten und eine nicht wegzudenkende Rolle spielen. Abschließend werfen wir einen Blick auf die sogenannte Graphentheorie, einem großen und sehr wichtigen Teilgebiet der Kombinatorik.

8.1 Summen- und Produktregel

Die ersten beiden Zählregeln, die wir uns ansehen, sind die sogenannte Summen- und die Produktregel. Im Folgenden bezeichnen wir mit $|A|$ stets die Mächtigkeit der Menge A, das heißt (da wir nur endliche Mengen betrachten) die Anzahl der Elemente in der Menge. Wir erhalten damit zunächst die folgende Regel:

Satz 8.1 (Summenregel)**.** *Sind A und B zwei endliche Mengen, so gilt:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dabei bezeichnet $A \cup B$ die Menge aller Elemente, die in A oder B sind, und $A \cap B$ bezeichnet die Menge aller Elemente, die in A und B sind.

Beweis. Wenn wir die Elemente in $A \cup B$ zählen wollen, dann können wir zuerst die Elemte in A und die in B zählen und beides zusammenaddieren. Dann haben wir tatsächlich alle Elemente in $A \cup B$ gezählt, manche Elemente jedoch doppelt. Die doppelt gezählten Elemente sind genau die, die sowohl in A als auch in B liegen, die also in $A \cap B$ sind. Da wir diese Elemente nur einmal zählen wollen, müssen wir deren Anzahl einmal von unserem Ergebnis abziehen. Das ergibt obige Gleichung. □

Ein Beispiel für die Summenregel ist das Folgende:

Beispiel 8.2. Wir berechnen die Anzahl der zweistelligen Zahlen, die mindestens eine Ziffer 4 enthalten. Dabei kann die 4 entweder an Zehnerstelle oder an Einerstelle stehen. Sei A die Menge der zweistelligen Zahlen, die an Zehnerstelle eine 4 haben und B die Menge der zweistelligen Zahlen, die an Einerstelle eine 4 haben. Dann ist $A \cup B$ die Menge aller Zahlen, die mindestens eine Ziffer 4 enthalten und es gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 10 + 10 - 1 = 19.$$

Wir kommen nun zur Produktregel. Dazu brauchen wir zunächst eine Definition:

Definition 8.3. Seien A und B zwei Mengen. Dann bezeichnen wir mit $A \times B$ die Menge aller Paare (a, b), wobei a aus A und b aus B stammt. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige n Mengen, so bezeichnen wir mit $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ die Menge aller Möglichkeiten, aus jedem A_i ein Element a_i auszuwählen, also die Menge aller $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit a_i aus A_i.

Beispiel 8.4. Sei $A = \{a, b\}$ und sei $B = \{1, 2, 3\}$. Dann ist

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Die folgende Regel hilft uns, die Anzahl der Elemente in $A \times B$ auszurechnen:

Satz 8.5 (Produktregel)**.** *Sind A und B zwei endliche Mengen, so gilt*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Beweis. Jedes Paar (a, b) aus $A \times B$ besteht aus einem Element a aus A und einem Element b aus B. Es gibt $|A|$ Möglichkeiten, das Element a zu wählen. Bei jeder dieser Möglichkeiten gibt es $|B|$ Möglichkeiten, das Element b zu wählen. Insgesamt haben wir also $|A| \cdot |B|$ mögliche Paare, wie zu beweisen war. □

Genauso kann man beweisen: Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ endliche Mengen, so gilt

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Beispiel 8.6. a) In obigem Beispiel 8.4 gilt $|A| = 2$, $|B| = 3$ und $|A \times B| = 6 = 2 \cdot 3$.

b) Ein Bit ist entweder 0 oder 1, ein Byte besteht aus 8 Bits, zum Beispiel 00101101. Wie viele verschiedene Bytes gibt es?

   Für jede Stelle des Bytes gibt es 2 Möglichkeiten. Da wir 8 Stellen haben, gibt es insgesamt $2^8 = 256$ mögliche Bytes. In diesem Beweis haben wir implizit die Produktregel angewandt: Sei $A_1 = A_2 = \cdots = A_8 = \{0, 1\}$. Dann ist $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_8| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^8$.

c) Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es? Es gibt 9 Möglichkeiten für die erste Ziffer und jeweils 10 Möglichkeiten für jede weitere Ziffer. Also gibt es $9 \cdot 10^4 = 90000$ fünfstellige Zahlen.

Die folgende Aufgabe ist eine etwas abgewandelte Version einer Zehntklässler-Olympiadeaufgabe:

Aufgabe 8.7. a) Wie viele zweistellige Zahlen gibt es, die keine Ziffer 4 enthalten?

b) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, die mindestens eine Ziffer 4 enthalten?

Lösung. Die Teilaufgabe a) ist relativ leicht gelöst: Es gibt 8 Möglichkeiten für die erste Ziffer (alle außer 0 und 4) und 9 Möglichkeiten für die zweite Ziffer, also insgesamt $8 \cdot 9$ zweistellige Zahlen ohne 4.

Für die Teilaufgabe b) gibt es mehrere Möglichkeiten zur Lösung:

1. Zwischen 100 und 200 gibt es genau 19 Zahlen mit einer Ziffer 4 (siehe Beispiel 8.2). Ebenso gibt es zwischen 200 und 300, zwischen 300 und 400 (ohne die 400), zwischen 500 und 600, zwischen 600 und 700, zwischen 700 und 800, zwischen 800 und 900 und zwischen 900 und 1000 jeweils 19 dreistellige Zahlen mit einer Ziffer 4. Das sind ingesamt schonmal $8 \cdot 19 = 152$ Zahlen. Hinzu kommen alle Zahlen zwischen 400 und 500, also nochmal 100. Insgesamt gibt es somit 252 dreistellige Zahlen mit mindetens einer Ziffer 4.

2. Wir machen eine Fallunterscheidung über die Position der Ziffer 4: Im ersten Fall gibt es genau eine 4 in der Zahl. Wenn diese 4 an erster Stelle steht, dann gibt es noch $9 \cdot 9$ Möglichkeiten für die anderen beiden Ziffern; wenn die 4 an zweiter oder dritter Stelle steht, dann gibt es jeweils $8 \cdot 9$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es im ersten Fall also $9 \cdot 9 + 2 \cdot (8 \cdot 9) = 225$ Möglichkeiten.

   Im zweiten Fall betrachten wir die Zahlen mit genau zwei Ziffern 4. Ist eine der beiden Vieren die erste Ziffer der Zahl, dann gibt es jeweils 9 Möglichkeiten für die „Nicht-Vier“, andernfalls nur 8 Möglichkeiten. Insgesamt haben wir in diesem Fall also $2 \cdot 9 + 8 = 26$ Zahlen.

   Der dritte Fall besteht aus den Zahlen mit genau drei Ziffern 4. Davon gibt es nur eine, nämlich 444.

   Insgesamt haben wir also $225 + 26 + 1 = 252$ Zahlen mit mindestens einer Ziffer 4.

3. Es gibt $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ dreistellige Zahlen, die keine Ziffer 4 enthalten (8 mögliche Hunderterstellen, jeweils 9 mögliche Zehner- und Einerstellen). Da es insgesamt 900 dreistellige Zahlen gibt, gibt es genau $900 - 648 = 252$ dreistellige Zahlen mit mindestens einer Ziffer 4.

Der dritte Lösungsweg demonstriert ein sehr mächtiges Hilfsmittel beim Zählen: Anstatt die Elemente einer Menge A direkt zu zählen, zählt man alle Elemente der Grundmenge, die nicht in A liegen.

8.2 Permutationen

In diesem Abschnitt werfen wir einen kurzen Blick auf das Zählen von ganz bestimmten Dingen, nämlich von sogenannten Permutation:

Definition 8.8. Eine *Permutation* von n Objekten ist eine Anordnung dieser n Objekte.

Es gibt eine einfache Formel für die Anzahl der Permutationen von n Objekten:

Satz 8.9. *Es gibt genau $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Permutationen von n Objekten.*

Beweis. Es gibt n Möglichkeiten für das erste Objekt in der Anordnung. Bei jedem ersten Objekt gibt es $n-1$ Möglichkeiten für das zweite Objekt, dann jeweils $n-2$ Möglichkeiten für das dritte Objekt und so weiter. Insgesamt gibt es also $n!$ mögliche Anordnungen. □

Beispiel 8.10. Es gibt $5! = 120$ Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge die fünf Teilnehmer eines Wettrennens ins Ziel kommen.

Die folgende Aufgabe stammt aus der achten Klasse der Matheolympiade:

Aufgabe 8.11. Die sechs Freund A, B, C, D, E und F wollen im Kaufhaus eine Rolltreppe benutzen.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der die sechs Freunde die Rolltreppe betreten?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es noch, wenn A ganz vorne und F ganz hinten sein wollen?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn A, B und C beisammen stehen wollen (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge)?

Lösung. In Teilaufgabe a) gibt es $6! = 720$ Möglichkeiten. Bei b) sind es noch $4! = 24$ Möglichkeiten, da nur noch die Freunde B, C, D und E angeordnet werden müssen.

Die Teilaufgabe c) ist ein bisschen schwieriger: Als erstes betrachten wir die drei Freunde A, B, C als ein Objekt. Zusammen mit D, E und F haben wir dann vier Objekte, die wir anordnen müssen, dafür gibt es also 4! Möglichkeiten. Nun gibt es bei jeder dieser Möglichkeiten noch 3! mögliche Anordnungen der Freunde A, B, C untereinander. Insesamt gibt es also $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$ Möglichkeiten.

8.3 Variationen

In diesem Abschnitt betrachten wir sogenannte Variationen, die eine Verallgemeinerung von Permutationen darstellen:

Definition 8.12. Eine *Variation* von n Objekten auf k Plätze ist eine Belegung der k Plätze mit den n Objekten, wobei die Reihenfolge wichtig ist. Wenn jedes Objekt nur einmal verwendet werden darf, spricht man von „ohne Wiederholung“, andernfalls von „mit Wiederholung“.

Offenbar ist eine Variation von n Objekten auf n Plätze ohne Wiederholung das gleiche wie eine Permutation der n Objekte.

Satz 8.13. *Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Variationen ohne Wiederholung von n Objekten auf k Plätze und n^k Variationen mit Wiederholung von n Objekten auf k Plätze.*

Beweis. Der Beweis für Variationen ohne Wiederholung ist genauso wie bei den Permutationen. Die Formel für die Anzahl der Variationen mit Wiederholung folgt sofort aus der Produktregel, denn für jeden Platz gibt es (unabhängig voneinander) genau n mögliche Objekte. □

Es folgen zwei beispielhafte Aufgaben, die Variationen benutzen.

Aufgabe 8.14. Ein Hotel hat 10 Zimmer. Nun erscheinen 7 Gäste. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 7 Gäste auf die 10 Zimmer zu verteilen, wenn in jedem Zimmer höchstens ein Gast sein darf?

Lösung. Der Trick besteht in der folgenden Betrachtung der Aufgabe: Statt jedem Zimmer einen Gast zuzuordnen können wir auch jedem Gast ein Zimmer zuordnen. Wir haben also sieben „Plätze“ (die Gäste) und auf jeden Platz müssen wir eine Nummer von 1 bis 10 schreiben, wobei sich die Nummern nicht wiederholen dürfen. Das ist also eine Variation: Es gibt 10 Möglichkeiten für die Zimmernummer des ersten Gastes, dann jeweils 9 Möglichkeiten für die Zimmernummer des zweiten Gastes, dann 8 für den dritten, 7 für den vierten, usw., bis der letzte Gast noch vier mögliche Zimmernummern hat. Es gibt somit

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 4 = 604800$$

mögliche Verteilungen. Beachte, dass das gleich $\frac{10!}{3!}$ ist, unsere alternative Formel für Variationen.

Aufgabe 8.15. Ein deutsches Autokennzeichen besteht (abgesehen vom Ortskürzel) aus

i) Ein oder zwei Blockbuchstaben, die jedoch nicht die Kombination NN oder NS bilden dürfen.

ii) Drei oder vier Ziffern.

Wie viele verschiedene Autokennzeichen gibt es also?

Lösung. Wir unterscheiden vier Fälle, je nachdem, wie viele Buchstaben und wie viele Ziffern das Kennzeichen hat:

1. Ein Buchstabe, drei Ziffern: In diesem Fall gibt es 26 Möglichkeiten für den Buchstaben und $10^3 = 1000$ Möglichkeiten für die Ziffern, also insgesamt $26 \cdot 1000 = 26000$ mögliche Kennzeichen.

2. Ein Buchstabe, vier Ziffern: Wie zuvor, nur mit 10^4 möglichen Zahlen, also insgesamt 260000 Möglichkeiten.

3. Zwei Buchstaben, drei Ziffern: Wir haben zunächst 26^2 Möglichkeiten, zwei Buchstaben zu wählen. Da aber NN und NS nicht erlaubt sind, haben wir nur $26^2 - 2$ Möglichkeiten für die beiden Buchstaben in unserem Kennzeichen. Dann gibt es noch jeweils 1000 mögliche Zifferkombinationen, also insgesamt $(26^2 - 2) \cdot 1000 = 674000$ mögliche Kennzeichen.

4. Zwei Buchstaben, vier Ziffern: Wie zuvor, nur mit 10^4 möglichen Zahlen, also insgesamt 6740000 Möglichkeiten.

Die Gesamtzahl aller möglichen Kennzeichen ist die Summe der Anzahlen aus den vier Fällen, da sich die Fälle nicht überschneiden (das ist wohlgemerkt eine etwas allgemeinere Version der Summenregel!). Es gibt also

$$26000 + 260000 + 674000 + 6740000 = 7700000$$

mögliche Kennzeichen.

8.4 Kombinationen

In diesem Abschnitt widmen wir uns nach den Permutationen und den Variationen den sogenannten Kombinationen. Zunächst eine Definition:

Definition 8.16. Eine *Kombination* von k Objekten aus n Objekten ist eine Auswahl von k Objekten unter den n Objekten.

Wie zuvor wollen wir auch in diesem Abschnitt eine Formel für die Anzahl der Kombinationen herleiten. Zunächst betrachten wir aber ein paar Beispiele.

Beispiel 8.17. a) Gegeben fünf Objekte a, b, c, d, e, wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus drei Objekte auszuwählen?

Wir zählen alle möglichen Auswahlen auf (dabei ist die Reihenfolge, in der man die Objekte wählt, egal):

$$abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.$$

Es gibt also 10 Möglichkeiten.

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, nur zwei Objekte aus a, b, c, d, e auszuwählen?

Es sind:

$$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de,$$

also wiederum 10 Möglichkeiten.

Wenn man ein wenig darüber nachdenkt, dann ist es nicht überraschend, dass es genauso viele Möglichkeiten gibt, zwei Objekte aus a, b, c, d, e auszuwählen, wie drei auszuwählen. Denn zwei Objekte auszuwählen ist gleichbedeutend damit, drei Objekte „nicht auszuwählen“ und es gibt offenbar genauso viele Möglichkeiten drei Objekte nicht auszuwählen wie drei Objekte auszuwählen.

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Objekte aus a, b, c, d, e auszuwählen? Nach der im vorigen Beispiel festgestellten Symmetrie ist „vier auswählen“ das gleiche wie „eins auswählen“, es muss also 5 Möglichkeiten geben. Und das ist tatsächlich richtig:

$$abcd, abce, abde, acde, bcde.$$

Unser Ziel ist es nun, eine allgemeine Formel für die Anzahl der Kombinationen von k Objekten aus n Objekten herzuleiten (für fixiertes n und k). Wir stellen fest, dass man Kombinationen auch durch Variationen beschreiben kann: Eine Kombination ist im Prinzip das gleiche wie eine Variation, nur dass man die Reihenfolge der Plätze nicht beachtet (so sind etwa abc und bca verschiedene Variationen, repräsentieren aber die gleiche Kombination, also die gleiche Auswahl von Objekten).

Ein Beispiel: Wir sehen, dass es für ein un dieselbe Kombination abc genau 6 verschiedene Variationen gibt, die sie repräsentieren, nämlich $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Das ist bei jeder Kombination von drei Objekten aus a, b, c, d, e so, das heißt die Anzahl der Kombinationen von 3 aus 5 ist ein Sechstel der Anzahl der Variationen von 5 Objekten auf 3 Plätze. Die Anzahl der Variationen ist $5 \cdot 4 \cdot 3$, somit erhalten wir $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ mögliche Kombinationen, wie wir im vorigen Beispiel bereits durch explizites Zählen festgestellt haben.

Wir verallgemeinern dieses Prinzip zu folgender Formel:

Satz 8.18. *Die Anzahl der Kombinationen von k Objekten aus n Objekten ist*

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Beweis. Es gibt $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ Möglichkeiten, n Objekte auf k Plätzen zu verteilen. Für jede Auswahl von k Objekten aus n Objekten gibt es dabei genau $k!$ mögliche Anordnungen der k Objekte auf den k Plätzen. Somit zählen wir bei den Variationen von n Objekten auf k Plätze jede Kombination von k Objekten aus n Objekten genau $k!$ mal. Es ergibt sich, dass die Anzahl der Kombinationen genau ein $k!$-tel der Anzahl der Variationen ist. Die gesuchte Anzahl ist also

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},$$

wie zu beweisen war.

Für die zweite Formel (rechts vom Gleichheitszeichen in der Behauptung) beachte man, dass $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$, womit sich aus den Regeln der Bruchrechnung ergibt:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$ □

Beispiel 8.19. a) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto zu gewinnen. Ein Los besteht aus 6 verschiedenen Zahlen, jede davon zwischen einschließlich 1 und 49. Aus dem vorigen Satz folgt, dass es

$$\binom{49}{6}=\frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6!}=13.983.816$$

mögliche Lose gibt. Da alle gleichwahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlichkeit, das richtige Los gezogen zu haben, gleich

$$\frac{1}{13.983.816}\approx7.15\cdot10^{-8}=0,0000075\%.$$

Es ist also recht unwahrscheinlich.

b) Gegeben sei eine Gruppe von 10 Jungen und 7 Mädchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus 5 Personen auszuwählen, wobei 3 davon Jungen und 2 davon Mädchen sein sollen?

Es gibt $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten, die 3 Jungen zu wählen. Bei jeder Wahl der Jungen gibt es $\binom{7}{2}$ Möglichkeiten, die Mädchen auszuwählen. Insgesamt gibt es also

$$\binom{10}{3}\cdot\binom{5}{2}=120\cdot10=1200$$

Möglichkeiten, die Gruppe zu wählen.

8.5 Das Pascalsche Dreieck

Aus dem Kapitel zu Zahlenfolgen (Abschnitt 4.5) ist uns das Pascalsche Dreieck bekannt (siehe Abbildung 8.33). Jede Zahl in dem Dreieck ist die Summe der beiden schräg darüberliegenden Zahlen.

Im Kapitel zu den Zahlenfolgen hatten wir die Binomialkoeffizienten als die Zahlen in dem Pascalschen Dreieck definiert. Dabei bezeichnete $\binom{n}{k}$ die Zahl an Position k in der n-ten Zeile. Nun haben wir eine neue Definition für den Binomialkoeffizienten, nämlich die Formel aus Satz 8.18. Die interessante Frage ist nun, ob die neue und die alte Definition der Binomialkoeffizienten übereinstimmen, ob also die Zahlen im Pascalschen Dreieck (gebildet durch die Bildungsvorschrift des Dreiecks) die Formel für die Anzahl der Kombinationen erfüllen. Dies ist tatsächlich der Fall, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 8.20. *Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind die Binomialkoeffizienten, das heißt die Zahl an Position k in der n-ten Zeile beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n Objekten auszuwählen.*

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass die Binomialkoeffizienten die gleiche Bildungsvorschrift erfüllen wie da Pascalsche Dreieck, da diese Vorschrift das Dreieck eindeutig definiert. Zum Beispiel muss gelten:

$$\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2},\quad\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4},\quad\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=\binom{3}{2}.$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\iddots & & & & & & & \vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Abbildung 8.33: Das Pascalsche Dreieck.

Im Allgemeinen muss der Binomialkoeffizient $\binom{n+1}{k+1}$, der an der $(k+1)$-ten Position in der $(n+1)$-ten Zeile steht, gleich der Summe der beiden darüberliegenden Binomialkoeffizienten, also $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k+1}$ sein, es muss also für alle n und k gelten:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Wir beweisen diese Formel auf zwei verschiedene Arten:

1. Wir bedienen uns einer sehr eleganten und sehr mächtigen Beweismethode der Kombinatorik: doppeltes Abzählen. Der Trick ist, eine bestimmte Menge auf zwei verschiedene Weisen abzuzählen und dabei zwei verwschiedene Formeln zu bekommen. Dann sind diese beiden Formeln natürlich gleich, weil sie ja das gleiche zählen.

   Wir zählen die Anzahl der Möglichkeiten, aus $n+1$ Objekten $k+1$ Objekte auszuwählen. Natürlich ist sofort klar, dass es dafür $\binom{n+1}{k+1}$ Möglichkeiten gibt. Wir können diese Möglichkeiten aber auch auf andere Weise zählen: Wir wählen ein bestimmtes Objekt a aus. Jede Wahl von $k+1$ Objekten aus $n+1$ Objekten enthält entweder das Objekt a oder nicht. Dabei gibt es $\binom{n}{k}$ mögliche Auswahlen, die a enthalten (abgesehen von a gibt es noch k weitere Objekte, die man aus n möglichen Objekten auswählen darf) und $\binom{n}{k+1}$ mögliche Auswahlen, die a nicht enthalten (da a nicht gewählt werden darf, gibt es nur n Objekte, aus denen man wählen darf). Somit ist die Gesamtzahl aller möglichen Auswahlen gleich $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Andererseits ist diese Anzahl gleich $\binom{n+1}{k+1}$, womit die behauptete Formel gezeigt ist.

2. Der zweite Lösungsweg besteht darin, die Formel für die Binomialkoeffizienten einzusetzen und so lange äquivalent umzuformen, bis man eine offensichtlich wahre Aussage erhält (wir benutzen dabei die Definition der Fakultät, zum Beispiel ist nämlich $(k+1)! = (k+1)\cdot k!$):

$$
\begin{array}{rcl}
 & \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} & \\
\iff & \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n+1-(k+1))!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-(k+1))!} & \\
\iff & \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1))!} & |\cdot(k+1)!\cdot(n-k)! \\
\iff & (n+1)! = (k+1)\cdot n! + (n-k)\cdot n! & |: n! \\
\iff & n+1 = k+1+n-k & \\
\iff & n+1 = n+1. &
\end{array}
$$

Beide Wege führen zum Ziel, jedoch ist der erste Weg eleganter. Dafür ist er aber schwerer zu finden. □

8.6 Formeln mit Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik. Nicht nur wegen ihrer kombinatorischen Bedeutung (also dass sie die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n Objekten auszuwählen, darstellen), sondern auch wegen bedeutungsvollen Formeln, die sie erfüllen. Die wohl bekannteste dieser

Formeln, der sogenannte Binomialsatz, wird am Ende dieses Abschnitts vorgestellt und dient als kleiner Ausblick, was man mit Binomialkoeffizienten alles anfangen kann.

Zunächst beweisen wir aber zwei andere Formeln über Binomialkoeffizienten, die ebenfalls interessant sein können:

Satz 8.21. *Sei $n \geq 0$ eine beliebige natürliche Zahl. Addiert man alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $k = 0, 1, \ldots, n$, das heißt addiert man alle Einträge der n-ten Zeile im Pascalschen Dreieck, so erhält man 2^n. In Formeln ausgedrückt:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Beweis. Eine Möglichkeit des Beweises wäre, sich das Pascalsche Dreieck genauer anzusehen und festzustellen, dass sich die Summe einer Zeile mit jeder Zeile verdoppelt. Wir führen allerdings einen anderen Beweis, der auf doppeltem Abzählen basiert.

Wir zählen die Anzahl aller Teilmengen von der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ (für $n = 0$ setzen wir $M = \emptyset$). Für jedes k zwischen 0 und n gibt es genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von M mit je genau k Elementen. Die Anzahl aller Teilmengen ist also die Summe $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

Andererseits lassen sich die Teilmengen auch folgendermaßen zählen: Jede Teilmenge ist dadurch bestimmt, welche Elemente sie enthält. Jedes Element kann entweder in der Teilmenge sein oder nicht, es gibt also für jedes der n Elemente aus M zwei Möglichkeiten; insgesamt gibt es somit 2^n Teilmengen von M. □

Satz 8.22. *Sei $n \geq 1$. Addiert man die Elemente in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks mit abwechselndem Vorzeichen, so erhält man 0. In Formeln ausgedrückt:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Beweis. Wir skizzieren einen Beweis. Der Leser sei dazu aufgefordert, ihn zu vervollständigen.

Nebeneinanderliegende Zahlen in der n-ten Zeile haben verschiedenes Vorzeichen in obiger Summe. Wir betrachten die Zahlen in der $(n-1)$-ten Zeile, aus denen die beiden nebeneinanderliegenden Zahlen durch Addition gebildet werden. Die Zahl, die in der $(n-1)$-ten Zeile zwischen den beiden nebeneinanderliegenden Zahlen aus der n-ten Zeile liegt, wird in beiden Zahlen als Summand benutzt. Da die beiden Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen in die Summe eingehen, heben sich die beiden Vorkommen der Zahl aus der $(n-1)$-ten Zeile auf. Dies passiert mit allen Zahlen in der $(n-1)$-ten Zeile, also ist die alternierende Summe 0, wie zu zeigen war. □

Zum Abschluss geben wir wie angekünfigt einen kleinen Ausblick auf den sogenannten Binomialsatz. Dieser Satz erlaubt es einem, die Summe von zwei Zahlen zu potenzieren, also Terme wie $(a+b)^n$ auszurechnen. Im Fall $n = 2$ erhält man durch Ausmultiplizieren die binomische Formel

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Auf ähnliche Weise kann man Formeln für höhere Potenzen aufstellen (jeweils durch Ausmultiplizieren), zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.
\end{aligned}$$

Die dabei auftretende Zahlen (sogenannte Koeffizienten) entpuppen sich bei genauerem Hinsehen als genau die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Dies führt zu folgendem Satz:

Satz 8.23. *Seien a und b zwei Zahlen, sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Die Formel auf der rechten Seite mag kompliziert aussehen (und eignet sich gewöhnlich nicht sonderlich gut zum Berechnen von $(a+b)^n$), spielt aber eine große Bedeutung in vielen mathematischen Anwendungen. Zum Beispiel folgen sofort die obigen beiden Sätze: Satz 8.21 folgt für $a = b = 1$ und Satz 8.22 folgt für $a = 1$, $b = -1$.