# Edwards' Experiment - Binomialverteilung und Theorem von Bayes

Im Jahr 1968 führte der Wissenschafter Ward Edwards ein Experiment durch. Den Teilnehmern wurden zwei Urnen präsentiert, eine mit 7 roten und 3 blauen Kugeln, eine andere mit 3 roten und 7 blauen Kugeln. Anschließend wurde eine Ziehung mit Zurücklegen (= Ziehen der Kugel, notieren der Farbe, zurücklegen der Kugel in die Urne) aus einer der beiden Urnen vorgenommen. Die Ziehung ergab 8 rote Kugeln und 4 blaue Kugeln.
Die Frage an die Teilnehmer war nun:

*Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese Ziehung aus der ersten Urne?*

Die meisten Menschen antworteten, dass die Wahrscheinlichkeit bei ca. 70% liege. Edwards zeigte damit experimentell, dass Menschen sich in bestimmten Situationen zu sehr auf ihre "Prior Information" und zu wenig auf gegebene Daten verlassen. Außerdem zeigte er, dass Menschen ihre "beliefs" sehr langsam anpassen. Dieser bias wird "Conservatism" genannt und findet beispielsweise Anwendung in der verhaltensökonomischen Finanzwirtschaft.

Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit, dass die Ziehung aus der ersten Urne stammt, liegt bei ca. 97%. Mithilfe des Theorem von Bayes und der Binomialverteilung wird das nun gezeigt werden:

Zuerst muss man feststellen, welche Informationen es bereits gibt:
Es gibt eine binomialverteilte Zufallsvariable X, die den Wert 1 annimmt, wenn die Kugel rot ist und 0, wenn sie blau ist. Die Ziehung ist die Realisation von zwölffachem Ziehen mit Zurücklegen und wird im folgenden einfach mit $X = \{X_1, ..., X_{12}\}$ bezeichnet.
Darüber hinaus weiß man, dass es eine Menge an Urnen $U = \{U_1, U_2\}$, die jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(U = U_1) = P(U = U_2) = 0,5$ haben ausgewählt zu werden.

Ebenfalls ist bekannt, wie die Kugeln/Farben in den Urnen verteilt sind, bzw. welche Wahrscheinlichkeit sie haben. Da diese Wahrscheinlichkeiten bedingt darauf sind, in welche Urne man guckt, erhält man die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X_i = \text{"}rot\text{"}|U_1) = 0,7$$
$$P(X_i = \text{"}blau\text{"}|U_1) = 0,3$$

$$P(X_i = \text{"}rot\text{"}|U_2) = 0,3$$
$$P(X_i = \text{"}blau\text{"}|U_2) = 0,7$$

Die gestellte Frage war nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Ziehung X aus der Urne $U_1$ stammt:

$$P(U_1|X)$$

Mit dem Satz von Bayes lässt sich das wie folgt schreiben:

$$P(U_1|X) = \frac{P(X|U_1) * P(U_1)}{P(X)}$$

Im Nenner steht die Wahrscheinlichkeit, die gegebene Ziehung zu erhalten. Diese lässt sich mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ausrechnen:

$$P(X) = P(X|U_1) * P(U_1) + P(X|U_2) * P(U_2)$$

Da die Wahrscheinlichkeiten für die Urnen identisch sind, lässt sich das ausklammern:

$$P(X) = P(U_1) * [P(X|U_1) + P(X|U_2)]$$

Um $P(U_1|X)$ auszurechnen benötigen wir also sowohl die Wahrscheinlichkeit, X zu erhalten, gegeben dass die Ziehung aus Urne 1 ist, als auch die Wahrscheinlichkeit für X, falls die Ziehung aus Urne 2 ist. Mit den bekannten Informationen und der Binomialverteilung lässt sich folgende Formel aufstellen:

$$P(X|U_i) = \binom{12}{8} * P(X = "rot"|U_i)^8 * P(X = "blau"|U_i)^4$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{12}{8}$ ergibt 495, woraus folgt:

$$P(X|U_1) = 495 * 0,7^8 * 0,3^4 = 0,2311$$

$$P(X|U_2) = 495 * 0,3^8 * 0,7^4 = 0,007798$$

Daraus ergibt sich für die totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(X) = 0,5 * [0,2311 + 0,007798] = 0,11945$$

So kommt man zum Ergebnis für die eigentliche Fragestellung:

$$P(U_1|X) = \frac{0,2311 * 0,5}{0,11945} = 0,9674$$

Zum Vergleich lässt sich auch die Komplementärwahrscheinlichkeit ausrechnen:

$$P(U_2|X) = \frac{0,007798 * 0,5}{0,11945} = 0,0326 = 1 - P(U_1|X)$$